Probabilidades

Introdução às Probabilidades e Estatística

Ciências ULisboa

Sumário

1. Experiências, espaço de resultados e acontecimentos
2. Álgebra de Acontecimentos
3. Probabilidade
4. Probabilidade condicional, a regra multiplicativa
5. Teorema da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes

1. Experiências, Espaço de Resultados e Acontecimentos

Experiências

"Sempre que aplicamos matemática a fim de estudar alguns fenómenos de observação, devemos essencialmente começar por construir um modelo matemático (determinístico ou não) para esses fenómenos." *Neyman, J.*

Matemática $\Rightarrow$ Criação de modelos $\Rightarrow$ Estudo dos fenómenos da natureza

Modelos Determinísticos $\Rightarrow$ Experiências determinísticas

Modelos Probabilísticos $\Rightarrow$ Experiências aleatórias

Modelo determinístico

Modelo determinístico: É um modelo matemático que fornece uma previsão exata do resultado, ou seja, não há incerteza envolvida.

Experiências determinísticas produzem o mesmo resultado desde que sejam realizadas nas mesmas condições e se pode repetir um grande número de vezes em condições uniformes.

Exemplo: fórmula matemática para calcular a distância percorrida por um objeto que se move a uma velocidade constante por um determinado tempo (lei do movimento uniforme). Sabendo a velocidade e o tempo, podemos prever com precisão a distância percorrida.

$$S = S_0 + v.t$$

Modelo aleatório: É um modelo em que, mesmo conhecendo as condições do experimento, não é possível determinar o seu resultado final.

Experiências aleatórias caracterizam-se pela impossibilidade de prever o resultado que se obterá, ainda que sejam realizadas nas mesmas condições. Só é possível determinar a chance de ocorrência de um resultado.

Exemplo:

- Lançamento de um dado e observar a face voltada para cima.
- Registo do número de sinistros por apólice do ramo automóvel durante um ano.

Experiência aleatória

Definição (Experiência aleatória)

Uma experiência diz-se **aleatória** se:

- conhecemos todos os resultados possíveis previamente à sua realização;
- não é possível prever o resultado de cada realização;
- é possível ser repetida nas mesmas condições.

Exemplos:

$\mathbf{E}_1$: Lançar um dado e observar a face voltada para cima.

$\mathbf{E}_2$: Selecionar uma carta do baralho e observar o valor e naipe da carta.

$\mathbf{E}_3$: Lançar uma moeda até que apareça cara e observar o número de lançamentos.

$\mathbf{E}_4$: Acender uma lâmpada e observar o tempo decorrido até que ela se apague.

Espaço amostral ou Espaço de resultados

Definição (Espaço amostral ou Espaço de resultados)

É o conjunto de **todos os resultados possíveis** de uma experiência aleatória. Representa-se geralmente por S ou Ω.

Classificação de Ω

- **Discreto:** Ω é finito ou infinito numerável.
- **Contínuo:** Ω é infinito não numerável.

Ciências ULisboa

Exemplos:

$\mathbf{E}_1$: Lançar um dado e observar a face voltada para cima.

$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\leftarrow$ finito

$\mathbf{E}_2$: Selecionar uma carta do baralho e observar o valor e naipe da carta.

$\Omega_2 = \{$ás $\heartsuit, \ldots,$ Dama $\clubsuit, \ldots,$Rei $\spadesuit, \ldots,$ Rainha $\diamondsuit\}$ $\leftarrow$ finito

$\mathbf{E}_3$: Lançar uma moeda até que apareça cara e observar o número de lançamentos.

$\Omega_3 = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ $\leftarrow$ infinito numerável

$\mathbf{E}_4$: Acender uma lâmpada e observar o tempo decorrido até que ela se apague.

$\Omega_4 = \{t; t > 0\} =]0, +\infty[$ $\leftarrow$ infinito não numerável

Evento ou Acontecimento

Definição (Evento ou Acontecimento)

Um **evento** ou **acontecimento** é um subconjunto de Ω.

- É designado por uma letra maiúscula (A, B, C).

- A todo evento será possível associar uma probabilidade.

Exemplos:

$\mathbf{E}_1$: Lançamento de um dado

$\Omega_1 = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$

A $=$ Sai a face 2 $= \{$⚁$\}$

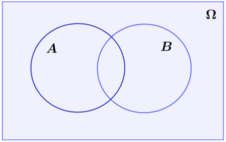
B $=$ Sai face ímpar $= \{$⚀, ⚂, ⚄$\}$

C $=$ Sai face com número menor que 3 $= \{$⚀, ⚁$\}$

2. Álgebra de Acontecimentos

Como o espaço de resultados Ω e os acontecimentos são conjuntos, as mesmas operações realizadas com conjuntos são válidas para acontecimentos.

Os **diagramas de Venn**[1] serão úteis para nos dar uma intuição geométrica sobre a relação entre os conjuntos.



[1] O diagrama de Venn é nomeado em homenagem a John Venn, um matemático britânico que o desenvolveu no final do século XIX.

Álgebra de Acontecimentos (cont.)

Operações com acontecimentos

- $\overline{A}$ – não ocorrência de A (complementação)
- $A \cap B$ – ocorrência de ambos os acontecimentos (intersecção)
- $A - B = A \cap \overline{B}$ – apenas a ocorrência de A (diferença)
- $A \cup B$ – ocorrência de pelo menos um dos acontecimentos (união)
- Lei de Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ e $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Exemplo: Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{5, 6\}$.

$\overline{A} = \{2, 4, 6\}$

$A - B = \{1, 3\}$

$A \cap B = \{5\}$

$A \cup B = \{1, 3, 5, 6\}$

Ciências ULisboa

Acontecimentos especiais

Definição (Acontecimentos especiais)

Acontecimento elementar: é um acontecimento que contém apenas um elemento do espaço amostral. É cada um dos resultados possíveis da experiência aleatória.

$$\{\omega\} \text{ com } \omega \in \Omega$$

Acontecimento composto: é um acontecimento que contém mais do que um dos resultados possíveis de uma experiência aleatória.

Acontecimento certo: é um acontecimento que contém todos os resultados possíveis da experiência aleatória (o próprio Ω).

$$A = \{(x, y); x^2 + y^2 \geq 0\}$$

Acontecimento impossível: é um acontecimento que não assume qualquer dos resultados da experiência aleatória (conjunto vazio $\emptyset$).

$$B = \{(x, y); x^2 + y^2 < 0\}$$

Acontecimentos especiais (cont.)

Definição (Acontecimentos disjuntos ou mutuamente exclusivos)

Dois acontecimentos A e B dizem-se **disjuntos** ou **mutuamente exclusivos** se não puderem ocorrer simultaneamente, ou seja,

$$A \cap B = \emptyset$$

Exemplo:

$\mathbf{E}_1$: Lançar uma moeda honesta e observar o resultado

$\Omega = \{C, K\}$

A $=$ saiu cara $= \{\text{K}\}$

B $=$ saiu coroa $= \{\text{C}\}$

Como $A \cap B = \emptyset$ então A e B são disjuntos.

3. Probabilidade

Dado um acontecimento A, como quantificar a possibilidade de ocorrência de A?

Interpretação de Laplace (1749-1827)

Consideremos um espaço de resultados Ω formado por n elementos equiprováveis. A **probabilidade** de qualquer acontecimento A é dada por

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{número de casos favoráveis a A}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Limitações:

- $\#\Omega < +\infty$ - o número de acontecimentos elementares é **finito**.
- Ω é constituído por acontecimentos elementares **equiprováveis**.

Interpretação de Laplace (1749-1827)

Exemplo:

$\mathbf{E}_1$: Lançar uma moeda duas vezes e observar a face voltada para cima em cada lançamento.

C - "cara", K - "coroa"

$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}$

$P(CC) = P(CK) = P(KC) = P(KK) = \frac{1}{4}$

A = ocorrência de uma cara = {CK, KC}

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Interpretação frequencista

A probabilidade de um acontecimento pode ser avaliada ou estimada, observando a frequência relativa do mesmo acontecimento numa sucessão numerosa de provas ou experiências idênticas e independentes.

Interpretação frequencista

Sejam

- n – o número de realizações de uma experiência aleatória;
- n_A – o número de ocorrências de um acontecimento A nessas n repetições;
- $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$ – a frequência relativa do acontecimento A.

Então

$$P(A) = \lim_{n \to +\infty} f_n(A).$$

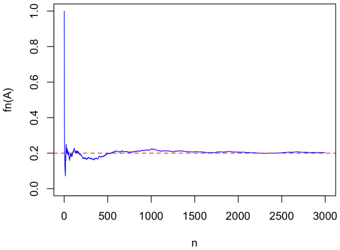
Limitações:

- Não se aplica quando não é possível repetir a experiência um número elevado de vezes e exatamente nas mesmas condições. Por exemplo, qual é a probabilidade de um asteroide gigante colidir com a Terra neste século?

Interpretação frequencista

Exemplo: Imagine uma experiência aleatória com apenas dois resultados possíveis, que, no entanto, não precisam ter a mesma probabilidade de ocorrência. Um exemplo disso é o lançamento de uma moeda, onde não há garantia de que a moeda seja perfeitamente equilibrada. Nesse caso, os dois desfechos – "cara" ou "coroa" – podem ter probabilidades diferentes, refletindo um possível viés na moeda.

Ao repetir a experiência um número muito elevado de vezes, observa-se que a frequência relativa dos possíveis resultados – que, neste caso, são apenas dois – tende a estabilizar à medida que o número de repetições aumenta. No entanto, a ordem específica em que esses valores ocorrem permanece imprevisível.



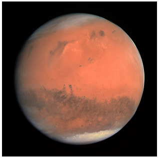
Código em R

```
# Número de repetições da EA
n <- 3000
# Probabilidade
p <- 0.2
# Simulação do lançamento de n moedas
x <- rbinom(n, size = 1, prob = p)
# Frequência relativa acumulada
freq_relativa <- cumsum(x)/(1:n)
# Gráfico
plot(1:n,freq_relativa, col="blue", type="l", ylim=c(0,1), xlab="n",
     ylab="fn(A)")
abline(h=p, col="red", lty=2)
```

Interpretação subjetivista

Admite-se que cada indivíduo pode atribuir a cada acontecimento um número real no intervalo $[0,1]$ - a que chama *probabilidade subjetiva do acontecimento* - e que exprime o seu grau de credibilidade pessoal em relação à ocorrência do acontecimento.

Exemplo: Quando perguntamos à duas pessoas com formação e graus de conhecimento distintos qual é a probabilidade de o homem visitar o planeta Marte antes do ano de 2030 obtivemos duas respostas: 0.5 e 0.



Limitações:

- Como vimos no exemplo anterior, a probabilidade pode variar muito de indivíduo para indivíduo, ou seja, não existe uniformidade de processos na atribuição de probabilidades subjetivas.

Axiomática de Kolmogorov (1903-1987)

O exemplo que vimos anteriormente sugere que não existe *uniformidade de processos na atribuição de probabilidades subjetivas*. Sugere também que recorramos a uma *forma mais geral e rigorosa de introduzir a noção de probabilidade*.

A definição **axiomática de Kolmogorov (1903-1987)** surge (com sua forma mais geral e rigorosa de introduzir a noção de probabilidade) como uma alternativa para resolver esta questão da incoerência entre os indivíduos. A coerência aparece através da verificação de um conjunto de axiomas.

https://en.wikipedia.org/wiki/Andrey_Kolmogorov

Axiomática de Kolmogorov (1903-1987)

Axiomática de Kolmogorov (1903-1987)

Seja Ω o espaço de resultados e $\mathcal{A}$ o conjunto dos acontecimentos definidos em Ω (i.e., elementos de $\mathcal{A}$ são subconjuntos de Ω). Então, uma função P definida sobre $\mathcal{A}$ diz-se uma função de probabilidade, caso satisfaça os seguintes axiomas:

Axioma 1. $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$.

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$.

Axioma 3. Seja $\{A_1, A_2, \ldots\}$ uma coleção numerável de eventos disjuntos de $\mathcal{A}$ (i.e., $A_i \cap A_j = \emptyset, \ \forall i \neq j$). Então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i).$$

♣ Um **axioma** é uma proposição ou afirmação assumida como verdadeira sem necessidade de demonstração, servindo como base para um sistema lógico ou matemático. A partir dos axiomas, outras proposições (teoremas, lemas, corolários) podem ser deduzidas por meio de regras lógicas. Os axiomas são usados em muitas áreas da matemática e da filosofia como uma maneira de estabelecer verdades fundamentais que são usadas como ponto de partida para a argumentação e a dedução.

Ciências ULisboa

Nota 1

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) \geq P(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}$$
$$\Rightarrow P(A) \in [0,1], \ \forall A \in \mathcal{A}.$$

Nota 2

Está implícito na definição anterior que o conjunto $\mathcal{A}$ de acontecimentos tem as seguintes propriedades:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$;
3. $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \mathcal{A}$ para qualquer coleção numerável $\{A_1, A_2, \ldots\}$ de eventos de $\mathcal{A}$,

isto é, $\mathcal{A}$ é uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω.

Definição (Espaço de probabilidade)

O termo $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ é designado espaço de probabilidade.

Exemplo: Exemplos de $\sigma-$álgebra:

- $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$;
- $\mathcal{A}_2 = \mathbb{P}(\Omega)$, a coleção de todos os subconjuntos de Ω (ou o conjunto das partes de Ω);
- $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma-$álgebra de Borel $=$ "menor" $\sigma-$álgebra que contém todos os intervalos de $\mathbb{R}$. Nota: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \neq P(\mathbb{R})$.

Exercício: Seja $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Verifique que $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$ é uma $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω.

♣ Os conjuntos de Borel devem-se ao matemático francês Émile Borel (1871-1956). A par dos matemáticos franceses René-Louis Baire (1874-1932) e Henri Lebesgue (1875-1941), Borel foi um dos pioneiros da teoria da medida e suas aplicações à teoria da probabilidade.
♣ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ é tão ampla que parece inconcebível que algum subconjunto de $\mathbb{R}$ não pertença a esta $\sigma-$álgebra. Contudo, é possível criar tais subconjuntos. Um deles deve-se ao matemático russo Nikolai Nikolaevich Luzin (18883-1950).

Axiomática de Kolmogorov (1903-1987)

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e $A, B, C \in \mathcal{A}$.

Algumas consequências dos axiomas

1. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $P(A) \leq 1$
5. $P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
7. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Ciências ULisboa

Exercícios

Exercício: Em um edifício onde funciona o departamento de física de uma universidade, existem dois elevadores, A e B. Sabe-se por experiência que 40% dos físicos utilizam o elevador A, 35% utilizam o elevador B e 15% utilizam ambos os elevadores. Determine a probabilidade de um físico escolhido ao acaso:

(a) Utilizar pelo menos um elevador;

(b) Utilizar apenas o elevador A;

(c) Utilizar apenas um dos elevadores;

(d) Não utilizar nenhum dos elevadores.

Respostas: **(a)** 0.60, **(b)** 0.25, **(c)** 0.45, **(d)** 0.40

Exercícios (cont.)

Exercício: Na análise da água, são realizados testes à concentração de diversos metais, substâncias químicas ou bacteriológicas. Suponha que, numa determinada localidade, 16% dos poços testados excederam o nível máximo de dureza em 250 ppm (partes por milhão),20% dos poços excederam o nível máximo de ferro em 0.3 ppm e 8% ultrapassaram ambos os limites.

(a) Dado um poço selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade que este exceda o limite máximo para a dureza ou a concentração máxima de ferro?

(b) Qual é a probabilidade de que o mesmo poço exceda o limite de dureza, mas não o limite de ferro?

Respostas: **(a)** 0.28, **(b)** 0.08

Exercício: Em determinada população, 9.8% das pessoas adquirem a revista A, 22.9% a revista B, e 5.1%, ambas as revistas. Admite-se que a medida de probabilidade é a proporção dos indivíduos da população que adquirem as revistas. Determine a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso:

(a) Adquirir somente a revista A.

(b) Adquirir pelo menos uma das revistas.

(c) Não adquirir nem a revista A, nem a revista B.

Respostas: (a) 0.047, **(b)** 0.276, **(c)** 0.724

Exercício: Num aldeamento turístico encontram-se reunidos 200 turistas de vários países. Sabe-se que 82 falam português, 38 não falam inglês e há 62 turistas que falam português e inglês.

(a) Qual é a probabilidade de um turista, escolhido ao acaso, falar inglês mas não falar português?

(b) Qual é a probabilidade de um turista, escolhido ao acaso, falar pelo menos uma destas duas línguas?

(c) Qual é a probabilidade de um turista escolhido ao acaso, não falar inglês nem falar português?

Respostas: **(a)** 0.50, **(b)** 0.91, **(c)** 0.09

Exercícios (cont.)

Exercício: Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade, A e B eventos mutuamente exclusivos em $\mathcal{A}$ tal que $P(\overline{B}) = 0.6$ e $P(A \cup B) = 0.8$, então $P(A)$ é igual a:

(a) 0.2 **(b)** 0.3 **(c)** 0.4 **(d)** Nenhuma das anteriores

4. Probabilidade condicional, a regra multiplicativa

Probabilidade condicional

Análise Estatística

- Uma certa doença atinge cerca de 0.1% da população.

- Um teste para esta doença tem 95% de precisão.

Você testou positivo.

Qual é a chance de você ter a doença?

A. 100%

B. 95%

C. 9.5%

D. 2%

A. Casadevall e F. C. Fang, "Specialized Science", *Infection and Immunity* 82, n 4 (2014): 1355-60.

Análise Estatística

- Uma certa doença atinge cerca de 0.1% da população.

- Um teste para esta doença tem 95% de precisão.

Você testou positivo.

Qual é a chance de você ter a doença?

A. 100%
B. 95%
C. 9.5%
D. 2%

A. Casadevall e F. C. Fang, "Specialized Science", *Infection and Immunity* 82, n 4 (2014): 1355-60.

Ciências ULisboa

Probabilidade condicional

Análise Estatística

- Uma certa doença atinge cerca de 0.1% da população.

- Um teste para esta doença tem 95% de precisão.

Você testou positivo.

Qual é a chance de você ter a doença?

A. 100%

B. 95%

C. 9.5%

D. 2%

A. Casadevall e F. C. Fang, "Specialized Science", *Infection and Immunity* 82, n 4 (2014): 1355-60.

Probabilidade condicional

Análise Estatística

- Uma certa doença atinge cerca de 0.1% da população.

- Um teste para esta doença tem 95% de precisão.

Você testou positivo.

Qual é a chance de você ter a doença?

A. 100%

B. 95%

C. 9.5%

D. 2%

A. Casadevall e F. C. Fang, "Specialized Science", *Infection and Immunity* 82, n 4 (2014): 1355-60.

Análise Estatística

- Uma certa doença atinge cerca de 0.1% da população.

- Um teste para esta doença tem 95% de precisão.

Você testou positivo.

Qual é a chance de você ter a doença?

A. 100%
B. 95%
C. 9.5%
D. 2%

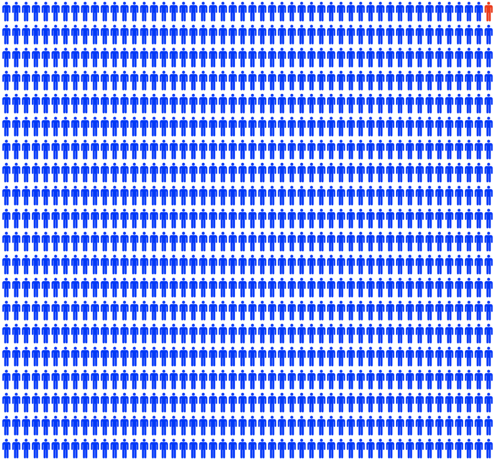
A. Casadevall e F. C. Fang, "Specialized Science", *Infection and Immunity* 82, n 4 (2014): 1355-60.

Probabilidade condicional (cont.)

- Em uma amostra de 1000 pessoas

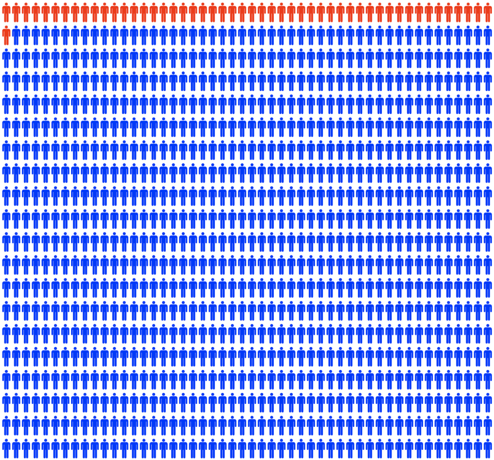
Probabilidade condicional (cont.)

- 0.1%, ou 1 pessoa tem a doença
- teste acerta 95% das vezes
- verdadeiro positivo $= 1 \times 0.95 = 0.95$ pessoas ≈ 1 pessoa



Probabilidade condicional (cont.)

- o teste dá falso positivo em 5% dos casos
- falso positivo $= 0.05 \times 999 = 49.95$ pessoas ≈ 50 pessoas



Probabilidade condicional (cont.)

- $P(\text{doente}|\text{positivo}) = \frac{\text{verdadeiros positivos}}{\text{total de positivos}} = \frac{1}{51} \approx 0.0196.$
- Entre as 51 pessoas cujo exame deu positivo, apenas 1, ou 1.96%, estarão realmente doentes.

Resposta:

A. 100%
B. 95%
C. 9.5%
D. $\approx 2\%$

Probabilidade condicional (cont.)

Será que uma informação adicional (ocorrência de um acontecimento) pode mudar o nosso cálculo de probabilidades?

Definição (Probabilidade condicional)

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade. Se $B \in \mathcal{A}$ e $P(B) > 0$, a **probabilidade condicional de A dado B** é definida por

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Probabilidade condicional (cont.)

Propriedades

1. $P(\emptyset \mid B) = 0$
2. $P(\overline{A} \mid B) = 1 - P(A \mid B)$
3. $P(A_1 \cup A_2 \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) - P(A_1 \cap A_2 \mid B)$
4. Se $A_1 \subset A_2$ então $P(A_1|B) \leq P(A_2|B)$
5. $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \mid B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \mid B)$, se $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$

Probabilidade condicional (cont.)

Exemplo: Suponha que dispomos de um baralho de 52 cartas (13 de cada naipe) do qual extraímos uma carta ao acaso. Qual é a probabilidade de a carta selecionada ser o rei de copas sabendo que se trata de uma carta de copas?

Acontecimentos

$$A = \text{sair rei de copas } \heartsuit$$

$$B = \text{sair uma carta de copas } \heartsuit$$

Probabilidades

$$P(A) = \frac{\#\text{casos favoráveis a A}}{\#\text{casos possíveis}} = \frac{1}{52}$$

$$P(B) = \frac{\#\text{casos favoráveis a B}}{\#\text{casos possíveis}} = \frac{13}{52}$$

Probabilidade pedida

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{1}{52} \times \frac{52}{13} = \frac{1}{13}.$$

Exercício: Num centro de inspeções, 32% dos carros não cumprem as normas relativas às emissões de hidrocarbonetos, 40% ultrapassam os limites de emissão de monóxido de carbono, e 18% dos carros excedem ambos os limites. Considerando uma interpretação frequencista de probabilidade, e sendo E e F os eventos que indicam falha no cumprimento dos limites para os hidrocarbonetos e para o monóxido de carbono, respetivamente.

(a) Qual a probabilidade de falhar devido a incumprimento relativamente ao monóxido de carbono, dado que falhou devido ao excesso de hidrocarbonetos?

(b) Qual a probabilidade de falhar devido a incumprimento relativamente às emissões de hidrocarbonetos, sabendo que falhou devido a excesso de emissão de monóxido de carbono?

Respostas: **(a)** 0.56 **(b)** 0.45

Exercícios (cont.)

Exercício (extra): Uma urna contém 5 bolas brancas e 5 bolas pretas. Dois jogadores, A e B, tiram alternadamente e um de cada de vez uma bola da urna. O jogador que tirar a primeira bola branca ganha a partida.

(a) Considere a experiência aleatória associada a este jogo e escreva o correspondente espaço de resultados.

(b) Calcule a probabilidade de cada jogador ganhar a partida sabendo que o jogador A é o primeiro a tirar a bola de urna.

(c) Responda novamente às alíneas (a) e (b) mas agora considerando que as bolas são extraídas com reposição.

Acontecimentos independentes

Definição (Acontecimentos independentes)

Dois acontecimentos quaisquer, A e B, são **independentes** quando a ocorrência de um não altera a probabilidade de ocorrência do outro

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{e} \quad P(B|A) = P(B)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Acontecimentos independentes (cont.)

Exemplo: Verifique se os acontecimentos são independentes ou dependentes. Lançar uma moeda e obter cara (A), e então lançar um dado e obter a face 6 (B).

Acontecimentos:

$A =$ "Obter cara no lançamento de uma moeda"
$B =$ "Obter face 6 no lançamento de um dado"

Probabilidades:

$P(B) = \frac{1}{6}$ e $P(B|A) = \frac{1}{6}$. A ocorrência de A não muda a probabilidade da ocorrência de B, então os acontecimentos são independentes.

Acontecimentos independentes (cont.)

Exemplo: Duas cartas são retiradas em sequência e sem reposição de um baralho com 52 cartas. Encontre a probabilidade de que a segunda carta seja uma rainha, dado que a primeira carta é um rei.

Acontecimentos:

$A =$ "ser rei"
$B =$ "ser rainha"

Probabilidade pedida:

$$P(B|A) = \frac{4}{51}$$

Note que $P(B) = \frac{4}{52}$ e $P(B|A) = \frac{4}{51}$. A ocorrência de A muda a probabilidade de ocorrência de B, então os acontecimentos são dependentes.

Acontecimentos independentes (cont.)

Definição (Acontecimentos mutuamente independentes)

Os acontecimentos A, B e C são **mutuamente independentes** se todas as condições abaixo se verificarem

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
2. $P(A \cap C) = P(A)P(C)$
3. $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Nota

Se A e B são acontecimentos independentes então também são independentes:

- A e $\overline{B}$
- $\overline{A}$ e B
- $\overline{A}$ e $\overline{B}$

Probabilidade condicional (cont.)

Definição (Independência condicional)

Os eventos A e B dizem-se **condicionalmente independentes** em relação ao evento C se e só se

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid C) \times P(B \mid C).$$

Regra multiplicativa

A **regra multiplicativa** é utilizada para obter a probabilidade da **intersecção** de acontecimentos.

Regra multiplicativa

Se A e B são dois acontecimentos quaisquer, então

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Caso particular: Se A e B são independentes

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ciências ULisboa

Regra multiplicativa (cont.)

Exemplo: Duas cartas são retiradas em sequência e sem reposição de um baralho com 52 cartas. Encontre a probabilidade de selecionar um rei e então selecionar uma rainha.

Acontecimentos:

$A =$ "ser rei"
$B =$ "ser rainha"

Probabilidade pedida:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B|A) \\ &= \frac{4}{52} \times \frac{4}{51} \\ &= \frac{16}{2652} \\ &\approx 0.006 \end{aligned}$$

Acontecimentos independentes e/ou mutuamente exclusivos

Sejam A e B acontecimentos tais que $P(A) > 0$ e $P(B) > 0$.

Propriedades

- Se A e B são mutuamente exclusivos $\Rightarrow$ A e B não são independentes.
- Se A e B não são independentes $\Rightarrow$ A e B podem ou não ser mutuamente exclusivos.
- Se A e B são independentes $\Rightarrow$ A e B não são mutuamente exclusivos.
- Se A e B não são mutuamente exclusivos $\Rightarrow$ A e B podem ou não ser independentes.

Exercício: Três indivíduos atiram a um alvo de forma independente, sendo a probabilidade de cada um deles acertar de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, respectivamente. Qual é a probabilidade de que:

(a) o alvo não seja atingido?

(b) o alvo seja atingido?

(c) o alvo seja atingido por pelo menos dois indivíduos?

Respostas: (a) $\frac{1}{4}$, **(b)** $\frac{3}{4}$, **(c)** $\frac{7}{24}$

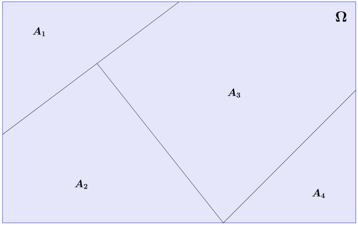
Ciências ULisboa

5. Teorema da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes

Partição de um espaço de resultados

Uma família $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ de acontecimentos é designada uma **partição** de Ω se

- $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$
- $A_i \cap A_j = \emptyset, \; \forall i \neq j$
- $P(A_i) > 0, \quad i = 1, \ldots, n$



Teorema da Probabilidade Total

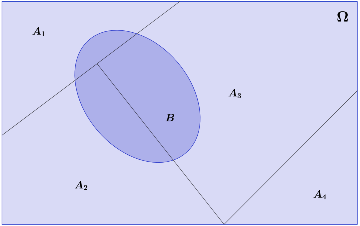
Teorema da Probabilidade Total

Se $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é uma partição de Ω e B é um acontecimento então

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$$

ou

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)$$



Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

Se $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é uma partição de Ω e B é um acontecimento tal que $P(B) > 0$, então

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \cdots + P(B|A_n)P(A_n)}$$

Dedução do Teorema de Bayes

- Por definição de probabilidade condicionada, tem-se que:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

- Pela mesma definição de probabilidade condicionada, tem-se por outro lado que:

$$P(B|A_i) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)} \implies P(A_i \cap B) = P(B|A_i) \cdot P(A_i) \tag{2}$$

- Substituindo o numerador da expressão (1) pela expressão (2), e usando o Teorema da Probabilidade Total no denominador de (1), tem-se o Teorema de Bayes:

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j) \cdot P(A_j)}$$

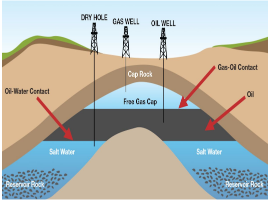
Ciências ULisboa

Teorema de Bayes (cont.)

Exercício: Um geólogo crê que existe petróleo numa certa região com probabilidade 0.8 e que, caso haja petróleo, a probabilidade de sair petróleo na primeira perfuração é de 0.5.

(a) Qual a probabilidade de sair petróleo na primeira perfuração?

(b) Tendo-se procedido à primeira perfuração da qual não resultou petróleo, qual é a nova probabilidade atribuída à existência de petróleo na região?



Respostas: **(a)** 0.40 **(b)** $\frac{2}{3} = 0.66\ldots$

Exercício: Admita-se que numa determinada região, 1% da população é portadora do vírus da hepatite B. De estudos efectuados sabe-se que para uma pessoa que de facto tenha a doença, uma determinada análise tem um resultado positivo, em 95% dos casos e para uma pessoa não infectada, esta percentagem passa para 0.5%. Suponha uma pessoa para quem a análise deu resultado positivo. Qual a probabilidade dessa pessoa ser portadora do vírus?

Resposta: 0.6574

Tabelas de dupla entrada

No caso de operações entre acontecimentos relativos a apenas duas variáveis, as probabilidades podem ser obtidas recorrendo a tabelas de dupla entrada

	Acontecimentos		
Acontecimentos	B1	B2	Total
A1	$P(A1 \cap B1)$	$P(A1 \cap B2)$	$P(A1)$
A2	$P(A2 \cap B1)$	$P(A2 \cap B2)$	$P(A2)$
Total	$P(B1)$	$P(B2)$	1

Probabilidades marginais

Probabilidade conjunta

Tabelas de dupla entrada (cont.)

Exemplo: Foram analisadas 1000 transações efetuadas em três moedas estrangeiras (Euros, Libras e Dólares) por duas empresas e registadas de acordo com a tabela. Selecionada uma transação ao acaso, determine a probabilidade de:

	Empresa		
Moeda	A	B	Total
Euros	110	90	200
Libras	120	180	300
Dolares	350	150	500
Total	580	420	1 000

(a) Ter sido realizada em Euros ou Libras.

(b) Ter sido realizada pela empresa A e em Libras.

(c) Ter sido realizada pela empresa B ou em Libras.

(d) Ter sido realizada pela empresa A, sabendo que foi realizada em Libras.

Respostas: **(a)** 0.50 **(b)** 0.12 **(c)** 0.54, **(d)** 0.40

Curiosidade

Paradoxo dos aniversários: Qual é a probabilidade de numa sala com n pessoas selecionadas aleatoriamente, pelo menos duas terem o mesmo aniversário?

- A probabilidade de uma pessoa fazer aniversário num dia qualquer é $= \frac{1}{365}$.

- A probabilidade dela fazer aniversário num dia diferente é $1 - \frac{1}{365} = \frac{364}{365}$.

- A probabilidade de n pessoas fazerem aniversário em dias diferentes é

$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \cdots \times \frac{365-(n-1)}{365} = \frac{365!}{356^n(365-n)!}$$

- A probabilidade do evento **pelo menos 2 entre n pessoas fazerem aniversário no mesmo dia** é dada pela probabilidade do complementar de "todas as n pessoas fazerem aniversário em dias diferentes", isto é,

$$p(n) = 1 - \frac{365!}{356^n(365-n)!}$$

Ciências ULisboa

Curiosidade (cont.)

- Para um grupo de **23 pessoas** temos

$$p(23) \approx 50.73\%$$

- Para um grupo de **50 pessoas** temos

$$p(50) \approx 97.04\%$$

Curiosidade (cont.)

O paradoxo vem do seguinte facto...

- A probabilidade de n pessoas fazerem aniversário num dia diferente do nosso é $\left(\frac{364}{365}\right)^n$.

- A probabilidade do evento **pelo menos 1 entre n pessoas fazer aniversário no mesmo dia que o nosso** é dada pela probabilidade do complementar de "n pessoas fazerem aniversário num dia diferente do nosso" é

$$q(n) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

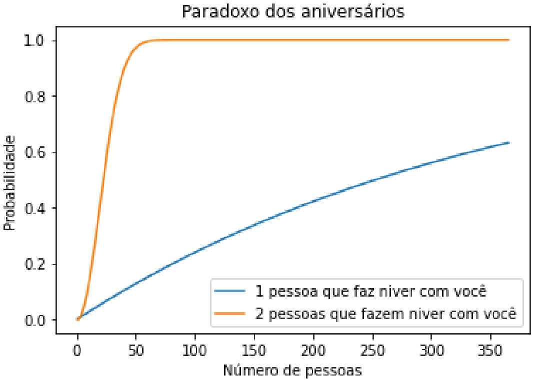
- Para um grupo de **23 pessoas** temos

$$p(23) \approx 50.73\% \quad \text{e} \quad q(23) \approx 6.12\%$$

- Para um grupo de **50 pessoas** temos

$$p(50) \approx 97.04\% \quad \text{e} \quad q(50) \approx 12.82\%$$

Curiosidade (cont.)



Alguns vídeos interessantes :)

- Quão aleatório é o lançamento de uma moeda?
`https://www.youtube.com/watch?v=AYnJv68T3MM`

- Uma explicação ilustrativa do Teorema de Bayes.
`https://www.youtube.com/watch?v=HZGCoVF3YvM`

- O problema de Monty Hall.
`https://www.youtube.com/watch?v=4Lb-6rxZxx0`

Referências

- Manuel Cabral Morais (2020): Probabilidade e Estatística: Teoria, Exemplos & Exercícios. IST Press, 1a edição.

Ciências ULisboa