

# Variáveis Aleatórias

## Elementos de Probabilidades e Estatística

1. Variáveis Aleatórias
2. Variáveis Aleatórias Discretas
3. Parâmetros das v.a. Discretas
4. Variáveis Aleatórias Contínuas
5. Parâmetros das v.a. Contínuas

# 1. Variáveis Aleatórias

# Variáveis Aleatórias

- Muitas vezes o resultado de uma experiência aleatória são **numéricos**.

**Experiência aleatória:** Lançamento de um dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Noutros casos os resultados são **não numéricos**, o que dificulta a aplicação de procedimentos matemáticos.

**Experiência aleatória:** Retirada ao acaso de 2 peças de uma caixa com 4 peças boas (B) e 5 peças defeituosas (D).

$$\Omega = \{BB, BD, DB, DD\}$$

É frequente não estarmos interessados em todos os resultados detalhados de uma dada experiência aleatória mas apenas num valor numérico.

E o que podemos fazer para lidar com essa situação?

Informalmente, surge então a necessidade de definirmos uma **função real**  $X$  que transforme cada resultado  $\omega$  da experiência aleatória num número real  $X(\omega)$  que denominamos de **variável aleatória**.



# Variáveis Aleatórias (cont.)

## Definição (Variável aleatória)

Seja  $\Omega$  e  $\mathcal{A}$  uma  $\sigma$ -álgebra de  $\Omega$ . Dizemos que uma função real  $X$  é uma **variável aleatória (v.a.)** se associar cada resultado  $\omega \in \Omega$  a um número real  $X(\omega) \in \mathbb{R}$  e garantir que para qualquer  $x \in \mathbb{R}$ , o conjunto

$$X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$$

pertence à  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A}$ .

## Observações:

- 1 Geralmente são representadas por letras maiúsculas  $X, Y, Z, W$ ;
- 2 Um valor particular representa-se por uma letra minúscula;
- 3  $P(X = x) = P(X(\omega) = x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$ .

# Variáveis Aleatórias (cont.)

**Exemplo 1:** Considere a seguinte experiência aleatória. Retirada ao acaso de 2 peças de uma caixa com 4 peças boas (B) e 5 peças defeituosas (D).

- $\Omega = \{BB, BD, DB, DD\}$
- $X =$  “número de peças defeituosas nas duas extrações”
- Quais são os possíveis valores de  $X$ ?
- $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

| $\Omega$ | $X(\Omega)$ |
|----------|-------------|
| $\{BB\}$ | 0           |
| $\{BD\}$ | 1           |
| $\{DB\}$ | 1           |
| $\{DD\}$ | 2           |

## Classificação de $X$

Seja  $X(\Omega)$  o contradomínio de uma variável aleatória  $X$ .

- $X$  é **discreta** se  $X(\Omega)$  é finito ou infinito numerável.
- $X$  é **contínua** se  $X(\Omega)$  é infinito não numerável.

## Exemplos:

- $X$  - “número de carros que passam por dia numa rua”
- $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0$
- $X$  - “tempo de espera entre a passagem de dois carros”
- $X(\Omega) = [0, +\infty[$



# Funções Caracterizadoras das Variáveis Aleatórias

- Variável aleatória **discreta**

- Função massa de probabilidade (f.m.p):  $f_X(x)$ ;
- Função de distribuição (f.d.):  $F_X(x)$ .

- Variável aleatória **contínua**

- Função densidade de probabilidade (f.d.p.):  $f_X(x)$ ;
- Função de distribuição (f.d.):  $F_X(x)$ .

# Funções Caracterizadoras das Variáveis Aleatórias (cont.)

**Exemplo 1 (cont.)** Quais são as probabilidades associadas aos possíveis valores de  $X$  no exemplo 1?

- $P(X = 0) = P(\{BB\}) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{72}$
- $P(X = 1) = P(\{BD, DB\}) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} + \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{40}{72}$
- $P(X = 2) = P(\{DD\}) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{20}{72}$

Note que  $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = P(\Omega) = 1$

## 2. Variáveis Aleatórias Discretas

## Definição (Variável aleatória discreta)

Seja  $\Omega$  um espaço de resultados. Chama-se **variável aleatória discreta** a uma função

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

com contradomínio  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ , finito ou infinito numerável, tal que

- $P(X = x) \neq 0$  se  $x \in \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$
- $P(X = x) = 0$  se  $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$

# Variáveis Aleatórias Discretas (cont.)

## Exemplos:

- Número de chamadas atendidas por um call center em uma hora;
- Número de alunos presentes em uma aula em um determinado dia;
- Número de falhas em um conjunto de componentes eletrônicos durante um teste de qualidade;
- Número de fósseis encontrados por metro cúbico de rocha;
- Número de amostras de solo contaminadas em um determinado local de mineração;
- Número de sismos registados numa região específica durante um ano;
- Número de clientes que visitam uma loja, por dia;
- Número de doentes atendidos na urgência de um hospital, entre as 8:00 e as 18:00.

# Variáveis Aleatórias Discretas (cont.)

## Definição (Função massa de probabilidade)

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta tomando valores em  $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Designa-se por **função de probabilidade** ou **função massa de probabilidade (f.m.p.)** uma função  $f$  tal que

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} P(X = x_i), & \text{se } x = x_i \in X(\Omega) \\ 0, & \text{se } x \neq x_i \end{cases}$$

e que satisfaz:

- 1  $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- 2  $\sum_{x \in \mathbb{R}} f_X(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} f_X(x) = 1$

# Variáveis Aleatórias Discretas (cont.)

## Exemplo 1 (cont.):

### Função massa de probabilidade

$$f_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{3}{18}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{10}{18}, & \text{se } x = 1 \\ \frac{5}{18}, & \text{se } x = 2 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

| $x$        | 0              | 1               | 2              |
|------------|----------------|-----------------|----------------|
| $P(X = x)$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{10}{18}$ | $\frac{5}{18}$ |

# Variáveis Aleatórias Discretas (cont.)

## Definição (Função de Distribuição)

Seja  $X$  uma variável aleatória. Define-se **função de distribuição (f.d.)** de uma variável aleatória  $X$  à função de valor real  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  tal que

$$F_X(x) = P(X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}$$

## Algumas propriedades da função de distribuição

- 1  $0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R};$
- 2  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1;$
- 3  $F_X(x)$  é uma função contínua à direita:  
 $\lim_{x \rightarrow a^+} F_X(x) = F_X(a), \forall a \in \mathbb{R};$
- 4  $F_X(x)$  é uma função monótona não decrescente:  
 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{ se } x_1 < x_2 \text{ então } F_X(x_1) \leq F_X(x_2);$
- 5  $P[X = a] = F_X(a) - F_X(a^-) = F_X(a) - \lim_{x \rightarrow a^-} F_X(x), \forall a \in \mathbb{R};$
- 6  $P[x_1 < X \leq x_2] = F_X(x_2) - F_X(x_1), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \text{ com } x_1 < x_2.$

Essas propriedades são válidas quer para v.a. discretas, quer para v.a. contínuas.



# Variáveis Aleatórias Discretas (cont.)

## Definição (Função de Distribuição de uma v.a. discreta)

Seja  $X$  uma variável aleatória discreta com função massa de probabilidade  $f_X(x)$ . A **função de distribuição** de  $X$  é dada por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{s \leq x} f_X(s)$$

Mais algumas propriedades da função de distribuição de uma v.a. discreta.  
Considere  $a < b$ .

- $P(X < x) = F_X(x^-)$ ;
- $P(X > x) = 1 - F_X(x)$ ;
- $P(X \geq x) = 1 - F_X(x^-)$ ;
- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ ;
- $P(a < X < b) = F_X(b^-) - F_X(a)$ ;
- $P(a \leq X < b) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$ ;
- $P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a^-)$ .

# Variáveis Aleatórias Discretas (cont.)

**Exemplo 1 (cont.)** Calcule a função de distribuição da v.a. definida no exemplo 1.

Sabemos que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- Se  $x < 0$ :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = 0$$

- Se  $x = 0$ :

$$F_X(0) = P(X \leq 0) = \sum_{x_i \leq 0} f(x_i) = f(0) = \frac{3}{18}$$

- Se  $x = 1$ :

$$F_X(1) = P(X \leq 1) = f(0) + f(1) = \frac{3}{18} + \frac{10}{18} = \frac{13}{18}$$

- Se  $x = 2$ :

$$F_X(2) = P(X \leq 2) = f(0) + f(1) + f(2) = \frac{3}{18} + \frac{10}{18} + \frac{5}{18} = 1$$

- Se  $x > 2$ :

$$F_X(x) = 1$$

## Exemplo 1 (cont.)

Tem-se então

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{3}{18}, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \frac{13}{18}, & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

# Variáveis Aleatórias Discretas (cont.)

**Exercício 1:** Um laboratório de geofísica está analisando uma remessa de 3 amostras de um mineral radioativo. A variável aleatória  $X$  representa o número de amostras que apresentam atividade radioativa acima de um certo limiar. A função massa de probabilidade de  $X$  é dada pela tabela abaixo:

| $x$        | 0    | 1        | 2    | 3    |
|------------|------|----------|------|------|
| $P(X = x)$ | 0.75 | $\kappa$ | 0.08 | 0.15 |

- (a) Determine o valor de  $\kappa$ .
- (b) Determine a probabilidade de não mais de duas amostras apresentarem atividade radioativa acima do limiar.
- (c) Determine  $P(X = 3|X > 0)$  e  $P(1 \leq X \leq 3|X \leq 2)$ .

**Respostas:** a)  $\kappa = 0.02$ ; b) 0.85; c) 0.6; 0.1176471

# Variáveis Aleatórias Discretas (cont.)

**Exercício 2:** A procura diária de uma amostra de mineral é uma v.a.  $X$  com a seguinte função de probabilidade:

$$f(x) = \kappa \frac{2^x}{x!}, \quad x = 1, 2, 3, 4$$

- (a) Determine o valor de  $\kappa$ .
- (b) Determine a função de distribuição de  $X$ .

**Respostas:**  $\kappa = \frac{1}{6}$ ;  $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ \frac{1}{3}, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{3}, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ \frac{8}{9}, & \text{se } 3 \leq x < 4 \\ 1, & \text{se } x \geq 4 \end{cases}$

### 3. Parâmetros das v.a. Discretas

# Parâmetros das v.a. Discretas

- Para descrevermos completamente o comportamento probabilístico de uma v.a. discreta  $X$ , é necessário recorrer à função de distribuição ou à função massa de probabilidade.
- No entanto, podemos optar por uma caracterização parcial de  $X$  através de algumas **medidas populacionais** ou **parâmetros populacionais** (valores fixos), que resumem informações relevantes sobre o seu comportamento.

Veremos os parâmetros de:

- localização central → **valor esperado**, **moda** e **mediana**;
- ordem → **quantil de probabilidade** (ou **quantil de ordem**)  $p$ ;
- dispersão → **variância**, **desvio padrão** e **coeficiente de variação**.

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

## Definição (Valor Esperado)

O **valor esperado** ou **valor médio** ou **média** de uma v.a. discreta  $X$  com função massa de probabilidade  $f_X$ , representa-se por  $E(X)$ ,  $\mu_X$  ou  $\mu$  e é dado por

$$\mu_X = E(X) = \sum_x x f_X(x)$$

## Observações:

- Quando  $X$  discreta toma um número infinito de valores, ou seja, quando o contradomínio de  $X$  é um conjunto infinito numerável,  $E(X)$  vai existir se a série for absolutamente convergente;
- $E(X)$  é um valor numérico nas mesmas unidades que a v.a.  $X$ ;
- $E(X)$  não pertence necessariamente ao conjunto de valores possíveis de  $X$ .



# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

## Valor Esperado de uma função de $X$

Seja  $X$  uma v.a. discreta com função massa de probabilidade  $f_X$  e seja  $Y = g(X)$  uma função da v.a.  $X$ . Então, caso  $E(Y)$  exista,

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_x g(x)f_X(x)$$

### Observações:

- De modo geral:

$$E[g(X)] \neq g[E(X)]$$

- Por exemplo:

$$E(|X|) \neq |E(X)| \text{ e } E\left(\frac{1}{X}\right) \neq \frac{1}{E(X)}$$

## Propriedades do Valor Esperado

Sendo  $X$  e  $Y$  duas variáveis aleatórias e  $\kappa$  uma constante real, tem-se

- ①  $E(\kappa) = \kappa$
- ②  $E(\kappa X) = \kappa E(X)$
- ③  $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
- ④  $E(XY) = E(X)E(Y)$  se  $X$  e  $Y$  são independentes

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

**Exemplo 1 (cont.):** Calcule o valor esperado da v.a.  $X$  do exemplo 1.

- **F.m.p de  $X$**

| $x$        | 0              | 1               | 2              |
|------------|----------------|-----------------|----------------|
| $P(X = x)$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{10}{18}$ | $\frac{5}{18}$ |

- **Valor esperado de  $X$**

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i f_X(x_i) = 0 \cdot \frac{3}{18} + 1 \cdot \frac{10}{18} + 2 \cdot \frac{5}{18} = \frac{20}{18} \approx 1.11 \text{ peças defeituosas}$$

O número médio de peças defeituosas nas 2 extrações é de 1.11 peças.

Note que  $E(X)$  não pertence ao conjunto de valores possíveis de  $X$ .

- **Como podemos calcular  $E(X^2)$ ?**

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 f_X(x_i) = 0^2 \cdot \frac{3}{18} + 1^2 \cdot \frac{10}{18} + 2^2 \cdot \frac{5}{18} = \frac{30}{18} \approx 1.66$$

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

## Moda de uma v.a. discreta

A moda da v.a. discreta  $X$  será representada por  $mo = mo(X)$  e corresponde ao ponto máximo da f.m.p de  $X$ , isto é,

$$mo \in X(\Omega) : P(X = mo) = \max_x P(X = x)$$

ou, equivalentemente,

$$mo = \arg \max_{x \in X(\Omega)} P(X = x)$$

### Observação:

A moda existe sempre e nem sempre é única. (*unimodal, bimodal, multimodal*)

A identificação do ponto de máximo da f.m.p passa pela determinação de

$$mo = mo(X) \in X(\Omega) : \begin{cases} P(X = mo) & \geq P(X = mo - 1) \\ P(X = mo) & \geq P(X = mo + 1) \end{cases}$$

**Exemplo 1 (cont.)** Obtenha a moda da v.a.  $X$  do exemplo 1.

- **V.a.**

$X =$  “número de peças defeituosas nas duas extrações”

- **F.m.p de  $X$**

|            |                |                 |                |
|------------|----------------|-----------------|----------------|
| $x$        | 0              | 1               | 2              |
| $P(X = x)$ | $\frac{3}{18}$ | $\frac{10}{18}$ | $\frac{5}{18}$ |

- **Moda de  $X$**

$mo = mo(X) = 1$  já que  $P(X = 1) = \max_x P(X = x)$ .

Logo a v.a.  $X$  é unimodal.

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

**Exemplo 2:** Admita que o número de partículas minerais detetadas em intervalos de 12 segundos durante a monitorização de uma erupção vulcânica é uma variável aleatória  $X$  com função massa de probabilidade (f.m.p.) dada por:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-0.8} \cdot 0.8^x}{x!}, & x = 0, 1, 2, \dots \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Obtenha o valor esperado e a moda de  $X$ .

- **V.a.**

$X$  = “número de partículas minerais detetadas num intervalo de 12 segundos”

- **F.m.p. de  $X$**

$$P(X = x) = \frac{e^{-0.8} \cdot 0.8^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

## Exemplo 2 (cont.):

- Valor esperado de  $X$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=0}^{+\infty} x \times P(X = x) \\ &= \sum_{x=0}^{+\infty} x \times \frac{e^{-0.8} \times 0.8^x}{x!} \\ &= \sum_{x=1}^{+\infty} \frac{e^{-0.8} \times 0.8^x}{(x-1)!} \\ &= 0.8 \times e^{-0.8} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{0.8^x}{x!} \\ &= 0.8 \times e^{-0.8} e^{0.8} \\ &= 0.8 \end{aligned}$$

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

## Exemplo 2 (cont.):

### • Moda de X

$$mo = mo(X) \in X(\Omega) : \begin{cases} P(X = mo) \geq P(X = mo - 1) \\ P(X = mo) \geq P(X = mo + 1) \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{P(X=mo)}{P(X=mo-1)} \geq 1 \\ \frac{P(X=mo+1)}{P(X=mo)} \leq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{\frac{e^{-0.8} \cdot 0.8^{mo}}{mo!}}{\frac{e^{-0.8} \cdot 0.8^{mo-1}}{(mo-1)!}} \geq 1 \\ \frac{\frac{e^{-0.8} \cdot 0.8^{mo+1}}{(mo+1)!}}{\frac{e^{-0.8} \cdot 0.8^{mo}}{mo!}} \leq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{0.8}{mo} \geq 1 \\ \frac{0.8}{mo+1} \leq 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} mo \leq 0.8 \\ mo + 1 \geq 0.8 \end{cases}$$

ou seja,  $mo = mo(X) = 0$ .



## Definição (Mediana)

A **mediana** de uma v.a.  $X$ , com função de distribuição  $F_X$ , é todo e qualquer ponto

$$me = me(X) : P(X \leq me) \geq \frac{1}{2} \text{ e } P(X \geq me) \geq \frac{1}{2}$$

que é equivalente:

$$me : \frac{1}{2} \leq F_X(me) \leq \frac{1}{2} + P(X = me)$$

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

**Exemplo 1 (cont.)** Obtenha a mediana da v.a.  $X$  do exemplo 1

- **V.a.**

$X$  = “número de peças defeituosas nas duas extrações”

- **F.d de  $X$**

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{3}{18}, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \frac{13}{18}, & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

- **Mediana de  $X$**

| Candidato a $me$ | $\frac{1}{2} \leq F_X(me) \leq \frac{1}{2} + P(X = me)$                                                             | Obs.             |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| 0                | $\frac{1}{2} \leq F_X(0) = \frac{3}{18} \leq \frac{1}{2} + P(X = 0) = \frac{1}{2} + \frac{3}{18} = \frac{13}{8}$    | Prop. falsa      |
| 0.5              | $\frac{1}{2} \leq F_X(0.5) = \frac{3}{18} \leq \frac{1}{2} + P(X = 0.5) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$            | Prop. falsa      |
| 1                | $\frac{1}{2} \leq F_X(1) = \frac{13}{18} \leq \frac{1}{2} + P(X = 1) = \frac{1}{2} + \frac{10}{18} = \frac{19}{18}$ | Prop. verdadeira |
| 1.5              | $\frac{1}{2} \leq F_X(1.5) = \frac{13}{18} \leq \frac{1}{2} + P(X = 1.5) = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$           | Prop. falsa      |

Portanto,  $me = 1$ .

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

## Definição (Quantil de ordem $p$ )

Seja  $X$  uma v.a. discreta, com função de distribuição  $F_X$ , e  $p \in [0, 1]$ . O **quantil de ordem  $p$**  (ou **quantil de probabilidade  $p$** ) da v.a.  $X$  é todo número real  $Q_p$  tal que

$$Q_p : P(X \leq Q_p) \geq p \quad \text{e} \quad P(X \geq Q_p) \geq 1 - p$$

que é equivalente:

$$Q_p : p \leq F_X(Q_p) \leq p + P(X = Q_p).$$

$Q_p$  também é representado por  $F_X^{-1}(p)$ .

## Quantis especiais (Quartis)

- $Q_{1/4} = F^{-1}(1/4) \rightarrow 1^\circ$  quartil
- $Q_{2/4} = F^{-1}(2/4) \rightarrow 2^\circ$  quartil ou mediana
- $Q_{3/4} = F^{-1}(3/4) \rightarrow 3^\circ$  quartil
- $Q_{1/100} = F^{-1}(1/100) \rightarrow 1^\circ$  percentil

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

**Exemplo 1 (cont.)** Obtenha o 3º quartil do número de peças defeituosas nas duas extrações.

- **V.a.**

$X$  = “número de peças defeituosas nas duas extrações”

- **F.d de  $X$**

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{3}{18}, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \frac{13}{18}, & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

- **Terceiro quartil de  $X$**

| Candidato a $Q_{3/4}$ | $\frac{3}{4} \leq F_X(Q_{3/4}) \leq \frac{3}{4} + P(X = Q_{3/4})$                                                   | Obs.             |
|-----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| 1                     | $\frac{3}{4} \leq F_X(1) = \frac{13}{18} \leq \frac{3}{4} + P(X = 1) = \frac{3}{4} + \frac{10}{18} = \frac{47}{36}$ | Prop. falsa      |
| 2                     | $\frac{3}{4} \leq F_X(2) = 1 \leq \frac{3}{4} + P(X = 2) = \frac{3}{4} + \frac{5}{18} = \frac{37}{36}$              | Prop. verdadeira |

Portanto,  $Q_{3/4} = 2$ .

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

## Definição (Variância de uma v.a. $X$ )

A **variância** de uma v.a. discreta  $X$ , com função massa de probabilidade  $f_X$  é dada por

$$V(X) = E \left\{ [X - E(X)]^2 \right\} = \sum_x [x - E(X)]^2 f_X(x),$$

caso  $E(X^2) < +\infty$ .

## Observações:

- $V(X)$  também pode ser representada por  $\sigma^2$ ,  $\sigma_X^2$ ,  $\text{Var}(X)$ .
- A variância é um valor numérico expresso no quadrado das unidades da v.a.  $X$ .
- É um parâmetro de dispersão que indica a variabilidade média da distribuição de probabilidade relativamente ao valor médio.

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

## Definição (Desvio padrão de uma v.a. $X$ )

O **desvio padrão** de  $X$  é a raiz quadrada positiva da variância de  $X$

$$\sigma_X = +\sqrt{V(X)}.$$

- O desvio padrão é utilizado para medir a dispersão dos valores de  $X$  em torno do seu valor médio;
- Ele é expresso nas unidades da variável.
- É um parâmetro de dispersão que indica a variabilidade média da distribuição de probabilidade relativamente ao valor médio.

## Propriedades da variância

Seja  $X$  uma variável aleatória e  $a, b \in \mathbb{R}$ .

- 1  $V(X) \geq 0$
- 2  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$  (fórmula de König)
- 3  $V(b) = 0$
- 4  $V(X + b) = V(X)$
- 5  $V(aX) = a^2 V(X)$
- 6  $V(aX + b) = a^2 V(X)$

# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

**Exemplo 1 (cont.)** Obtenha a variância e o desvio padrão do número de peças defeituosas nas duas extrações.

| $x_i$ | $f_X(x_i)$      | $x_i f_X(x_i)$                                              | $x_i^2 f_X(x_i)$                                                           |
|-------|-----------------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| 0     | $\frac{3}{18}$  | 0                                                           | 0                                                                          |
| 1     | $\frac{10}{18}$ | $\frac{10}{18}$                                             | $\frac{10}{18}$                                                            |
| 2     | $\frac{5}{18}$  | $\frac{10}{18}$                                             | $\frac{20}{18}$                                                            |
|       |                 | $\mu_X = 0 + \frac{10}{18} + \frac{10}{18} = \frac{20}{18}$ | $\sigma_X^2 = \frac{30}{18} - \left(\frac{20}{18}\right)^2 \approx 0.4309$ |

Estamos a usar  $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$  para o cálculo da variância.

O desvio padrão será  $\sigma_X = \sqrt{0.4309} \approx 0.6564$ .



# Parâmetros das v.a. Discretas (cont.)

**Exemplo 3:** Considerem-se duas v.a.  $X$  e  $Y$  cujas funções de probabilidade são, respectivamente:

$$X : \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 1 & \text{c.c.} \\ \hline f_X(x) & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

$$Y : \begin{array}{c|ccc} y & -1000 & 1000 & \text{c.c.} \\ \hline f_Y(y) & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}$$

Note que

- $E(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = 0$
- $E(Y) = -1000 \times \frac{1}{2} + 1000 \times \frac{1}{2} = 0$
- $E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = 1$
- $E(Y^2) = (-1000)^2 \times \frac{1}{2} + 1000^2 \times \frac{1}{2} = 1000^2$

Logo

- $V(X) = 1 - 0^2 = 1$
- $V(Y) = 1000^2 - 0^2 = 1000^2$
- $\sigma_X = 1$
- $\sigma_Y = 1000$

## 4. Variáveis Aleatórias Contínuas

## Variável Aleatória Contínua

Seja  $\Omega$  um espaço de resultados. Chama-se **variável aleatória contínua** a uma função

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

com contradomínio  $X(\Omega)$  infinito não numerável.

# Variáveis Aleatórias Contínuas (cont.)

## Exemplos:

- o tempo de reparação de uma peça mecânica (em segundos);
- a temperatura (em graus centígrados);
- a concentração de poluentes (em partes por milhão);
- a altura de um indivíduo (em metros);
- o tempo entre avarias de um certo tipo de equipamento (em meses);
- a profundidade em metros de um poço perfurado até atingir o aquífero;
- a concentração de um determinado mineral (como ouro ou ferro) em partes por milhão (ppm) numa amostra de solo ou rocha;
- o tempo necessário para que um mineral específico reaja completamente com um ácido durante um teste de laboratório, medido em minutos.

# Variáveis Aleatórias Contínuas (cont.)

## Definição (Variável Aleatória Contínua e função densidade de probabilidade)

Seja  $X$  uma v.a. e  $F_X(x) = P(X \leq x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , a sua função de distribuição. A v.a.  $X$  diz-se **contínua** se  $F_X$  for absolutamente contínua, isto é, se e somente se existe uma função **não negativa**  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}$  se tem

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

A função  $f_X$  chama-se **função densidade de probabilidade (f.d.p.)** de  $X$  e satisfaz:

- ①  $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$
- ②  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1.$

# Variáveis Aleatórias Contínuas (cont.)

## Função de distribuição

Seja  $X$  uma v.a. contínua. A **função de distribuição** da v.a.  $X$ , é uma função  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt.$$

- Ela representa a probabilidade acumulada até ao ponto  $x$ .
- A função densidade de probabilidade  $f_X(x) \approx F'_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$  mede, na vizinhança do ponto  $X = x$ , a concentração de probabilidade por unidade da v.a.  $X$ .

Note que, para  $\varepsilon > 0$

$$P\left(x - \frac{\varepsilon}{2} < X < x + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \int_{x - \frac{\varepsilon}{2}}^{x + \frac{\varepsilon}{2}} f_X(t) dt \approx \varepsilon \times f_X(x)$$

ou

$$f_X(x) \approx \frac{P\left(x - \frac{\varepsilon}{2} < X < x + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}$$

para cada intervalo de comprimento pequeno  $\varepsilon$ . Assim,  $\varepsilon \times f_X(x)$  aproxima a probabilidade de a v.a. contínua  $X$  pertencer ao intervalo  $\left[x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right]$ .



## Cálculo de probabilidades

- $P(X = x) = P(x \leq X \leq x) = \int_x^x f_X(t) dt = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R};$
- $P(X > x) = \int_x^{+\infty} f_X(t) dt = 1 - P(X \leq x) = 1 - F_X(x) = 1 - \int_{-\infty}^x f_X(t) dt;$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$

# Variáveis Aleatórias Contínuas (cont.)

**Exemplo 1:** Seja  $X$  uma variável aleatória contínua que representa a densidade mineral, em gramas por centímetro cúbico ( $\text{g/cm}^3$ ), medida em uma amostra de rocha. A função densidade de probabilidade de  $X$  é dada por

$$f(x) = \begin{cases} k, & 1 \leq x \leq 1.8 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde  $k$  é uma constante desconhecida.

- (a) Determine o valor de  $k$  de modo a que  $f$  seja a *f.d.p.* da v.a.  $X$ .
- (b) Qual a probabilidade da densidade mineral na amostra de rocha se situar entre 1.2 e  $1.6 \text{ g/cm}^3$ ?
- (c) Determine a função de distribuição de  $X$ .
- (d) Qual a probabilidade da densidade mineral na amostra de rocha ser no máximo  $1.2 \text{ g/cm}^3$ ?
- (e) Determine  $P(X > 1.6 | X > 1.2)$ .



# Variáveis Aleatórias Contínuas (cont.)

## Exemplo 1 (cont.):

(a) Para que  $f$  seja uma f.d.p ela deve satisfazer:

❶  $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow k > 0$

❷  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^{1.8} k dx = 1 \Leftrightarrow 0.8k = 1 \Leftrightarrow k = 1.25$$

Portanto a f.d.p é dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1.25, & 1 < x < 1.8 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b)

$$P(1.2 < X < 1.6) = \int_{1.2}^{1.6} f(x) dx = \int_{1.2}^{1.6} 1.25 dx = [1.25x]_{1.2}^{1.6} = 1.25 \times 0.4 = 0.5$$

# Variáveis Aleatórias Contínuas (cont.)

## Exemplo 1 (cont.):

- (c) • Para  $x < 1$ :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds = \int_{-\infty}^x 0 ds = 0$$

- Para  $1 \leq x < 1.8$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(s) ds = \int_{-\infty}^1 f(s) ds + \int_1^x f(s) ds = \int_{-\infty}^1 0 ds + \int_1^x 1.25 ds \\ &= 0 + (1.25) s \Big|_1^x = (1.25)(x - 1) \end{aligned}$$

- Para  $x \geq 1.8$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(s) ds = \int_{-\infty}^1 0 ds + \int_1^{1.8} 1.25 ds + \int_{1.8}^x 0 ds \\ &= (1.25) s \Big|_1^{1.8} = (1.25)(1.8 - 1) = 1.25 \times 0.8 = 1 \end{aligned}$$

## Exemplo 1 (cont.):

(c) Portanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1 \\ (1.25)(x - 1), & \text{se } 1 \leq x < 1.8 \\ 1, & \text{se } x \geq 1.8. \end{cases}$$

(d)

$$P(X \leq 1.2) = F(1.2) = (1.25)(1.2 - 1) = (1.25)(0.2) = 0.25$$

# Variáveis Aleatórias Contínuas (cont.)

## Exemplo 1 (cont.):

(e)

$$\begin{aligned} P(X > 1.6 | X > 1.2) &= \frac{P(X > 1.6 \wedge X > 1.2)}{P(X > 1.2)} = \frac{P(X > 1.6)}{P(X > 1.2)} = \\ &= \frac{\int_{1.6}^{+\infty} f(x) dx}{\int_{1.2}^{+\infty} f(x) dx} = \frac{\int_{1.6}^{1.8} 1.25 dx}{\int_{1.2}^{1.8} 1.25 dx} = \frac{0.2}{0.6} = \\ &= 0.333 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} P(X > 1.6 | X > 1.2) &= \frac{P(X > 1.6 \wedge X > 1.2)}{P(X > 1.2)} = \frac{P(X > 1.6)}{P(X > 1.2)} = \\ &= \frac{1 - P(X \leq 1.6)}{1 - P(X \leq 1.2)} = \frac{1 - F_X(1.6)}{1 - F_X(1.2)} = \\ &= \frac{1 - (1.25)(1.6 - 1)}{1 - (1.25)(1.2 - 1)} = \\ &= 0.333 \end{aligned}$$

## 5. Parâmetros das v.a. Contínuas

## Definição (Valor Esperado)

O **valor esperado** de uma v.a. contínua  $X$ , com função densidade de probabilidade  $f_X$  é dada por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

- $E(X)$  existe se o integral convergir absolutamente.

# Parâmetros das v.a. Contínuas (cont.)

## Valor Esperado de uma função de $X$

Seja  $X$  uma v.a. contínua com função densidade de probabilidade  $f_X$  e seja  $Y = g(X)$  uma função da v.a.  $X$ . Então, caso  $E(Y)$  exista,

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

# Parâmetros das v.a. Contínuas (cont.)

## Definição (Moda de uma v.a. contínua)

A moda da v.a. contínua  $X$  corresponde ao ponto máximo da f.d.p de  $X$ , isto é,

$$mo : f_X(mo) = \max_x f_X(x),$$

ou, equivalentemente,

$$mo = \arg \max_x f_X(x).$$

## Observação:

A **moda** de uma v.a. contínua obtém-se em geral, identificando

$$mo : \begin{cases} \frac{df_X(x)}{dx} \Big|_{x=mo} = 0 & \text{(ponto de estacionaridade)} \\ \frac{d^2f_X(x)}{dx^2} \Big|_{x=mo} < 0 & \text{(ponto de máximo)} \end{cases}$$

Alternativamente, a sua identificação passa pela simples análise do comportamento monótono da f.d.p.



# Parâmetros das v.a. Contínuas (cont.)

## Definição (Mediana de uma v.a. contínua)

Representaremos a **mediana** da v.a.  $X$  por  $me = me(X)$  onde

$$me : F_X(me) = \frac{1}{2}$$

## Definição (Quantil de probabilidade $p$ de uma v.a. contínua)

O **quantil de probabilidade** (ou **quantil de ordem**)  $p$  ( $0 < p < 1$ ) da v.a. contínua  $X$  define-se como

$$Q_p : F_X(Q_p) = p.$$

# Parâmetros das v.a. Contínuas (cont.)

## Definição (Variância de uma v.a. contínua)

A **variância** da v.a. contínua  $X$  é igual a

$$V(X) = E\{[X - E(X)]^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f_X(x) dx$$

caso exista  $E(X)$  e o integral seja absolutamente convergente.

**Observação:**

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - E^2(X) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx \right)^2 \end{aligned}$$

## Definição (Desvio padrão de uma v.a. contínua)

O **desvio padrão** da v.a.  $X$  é a raiz quadrada positiva da variância de  $X$

$$\sigma_X = +\sqrt{V(X)}.$$

# Parâmetros das v.a. Contínuas (cont.)

**Exemplo 1:** Em uma pesquisa geológica, deseja-se estudar a distribuição do teor de ouro (em gramas por tonelada) encontrado em amostras de solo de uma mina. O teor de ouro em uma amostra é uma variável aleatória contínua  $X$  com função de densidade de probabilidade (f.d.p.) dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) Calcule o valor esperado do teor de ouro nas amostras de solo.
- (b) Calcule a variância do teor de ouro nas amostras de solo.
- (c) Calcule o desvio padrão do teor de ouro nas amostras de solo.
- (d) Determine a moda do teor de ouro nas amostras de solo.
- (e) Determine a mediana do teor de ouro nas amostras de solo.
- (f) Determine o terceiro quartil do teor de ouro nas amostras de solo.

# Parâmetros das v.a. Contínuas (cont.)

(a),(b),(c)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^2 x \left( \frac{3}{8} x^2 \right) dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8} \times \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^2 \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{16}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 \left( \frac{3}{8} x^2 \right) dx = \frac{3}{8} \int_0^2 x^4 dx = \frac{3}{8} \times \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^2 \\ &= \frac{3}{8} \times \frac{32}{5} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{12}{5} - \left( \frac{3}{2} \right)^2 = \frac{3}{28}$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{28}} = 0.32732$$

# Parâmetros das v.a. Contínuas (cont.)

(d) Como a f.d.p  $f$  é crescente dentro do intervalo  $[0, 2]$ , a moda ocorre no valor  $x = 2$ .

(e) A função de distribuição de  $X$  é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^3}{8}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Assim,

$$me = me(X) \in (0, 2) : F_X(me) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(me)^3}{8} = \frac{1}{2}$$

$$(me)^3 = 4$$

$$me \approx 1.5874$$

Calculamos que  $\frac{1}{2}$  do teor de ouro encontrado em amostras de solo não excederão 1.5874 gramas por tonelada e a outra metade excederá 1.5874 gramas por tonelada .



(f) Queremos encontrar

$$\begin{aligned}Q_{3/4} : \quad F_X(Q_{3/4}) &= \frac{3}{4} \\ \frac{(Q_{3/4})^3}{8} &= \frac{3}{4} \\ (Q_{3/4})^3 &= 6 \\ Q_{3/4} &\approx 1.8171\end{aligned}$$

Note que  $P(X \leq Q_{3/4}) = \frac{3}{4}$  e  $P(X \geq Q_{3/4}) = \frac{1}{4}$ . Ou seja, calculamos que  $\frac{3}{4}$  (resp.  $\frac{1}{4}$ ) do teor de ouro encontrado em amostras de solo não excederão (resp. excederá) 1.8171 gramas por tonelada.

- Manuel Cabral Morais (2020): Probabilidade e Estatística: Teoria, Exemplos & Exercícios. IST Press, 1a edição.