

Estimação por intervalos de confiança

Elementos de Probabilidades e Estatística



1. Distribuições amostrais
2. Estimação por intervalos de confiança

1. Distribuições Amostrais

Distribuição amostral

Distribuição amostral

A distribuição de probabilidades de uma estatística $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $F_{T(X_1, X_2, \dots, X_n)}(x)$, designa-se por **distribuição amostral**.

Uma distribuição amostral depende:

- Da distribuição da população;
- Do tamanho da amostra;
- Do conhecimento ou não da variância populacional (no caso da média amostral).

Distribuições amostrais:

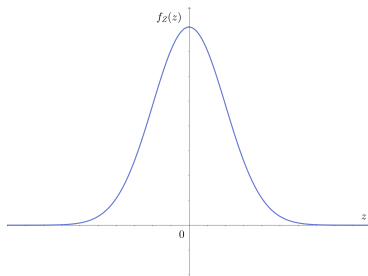
- Distribuição normal reduzida;
- Distribuição t-Student;
- Distribuição Qui-quadrado;
- Distribuição F-Snedecor.

Distribuição normal reduzida

- É uma variável aleatória Z com distribuição normal com valor médio $\mu = E(Z) = 0$ e desvio padrão $\sigma = \sqrt{V(X)} = 1$ e escreve-se:

$$Z \sim N(0, 1);$$

- A distribuição normal reduzida é simétrica em relação à reta $x = \mu = 0$:

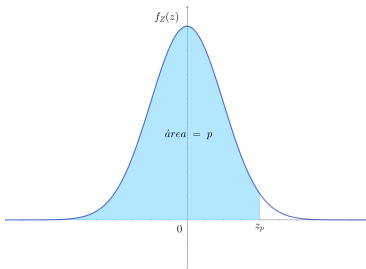


Distribuição normal reduzida (cont.)

- A expressão

$$z_p = \Phi^{-1}(p)$$

representa o valor da variável aleatória Z para o qual a probabilidade acumulada é p .



- Devido à simetria da função densidade tem-se:

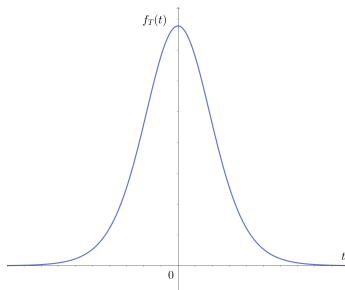
$$\Phi^{-1}(p) = -\Phi^{-1}(1 - p).$$

Distribuição t-Student

- Se a variável aleatória T segue uma distribuição t-Student com n graus de liberdade, escreve-se:

$$T \sim t_n \quad \text{ou} \quad T \sim t_{(n)}$$

- A distribuição t-Student é simétrica em relação à reta $x = \mu = 0$.



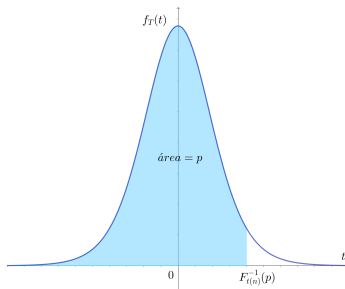
- $E(T) = 0$, se $n > 1$ e $V(T) = \frac{n}{n-2}$, se $n > 2$.

Distribuição t-Student (cont.)

- A expressão

$$F_{t(n)}^{-1}(p)$$

representa o valor da variável aleatória T para o qual a probabilidade acumulada é p :



- Devido à simetria da função densidade tem-se:

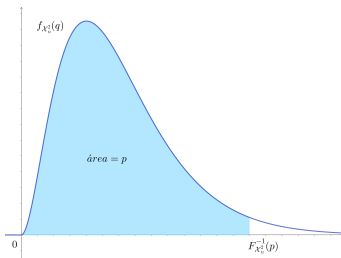
$$F_{t(n)}^{-1}(p) = -F_{t(n)}^{-1}(1 - p)$$

Distribuição Qui-quadrado (cont.)

- A expressão

$$F_{\chi^2(n)}^{-1}(p)$$

representa o valor da variável aleatória X para o qual a probabilidade acumulada é p :

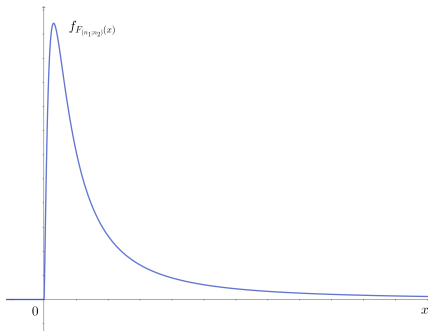


Distribuição F-Snedecor

- Se a variável aleatória X segue uma distribuição F-Snedecor com n_1 e n_2 graus de liberdade escreve-se:

$$X \sim F_{n_1; n_2} \quad \text{ou} \quad X \sim F_{(n_1; n_2)}$$

- A distribuição F-Snedecor é assimétrica positiva:



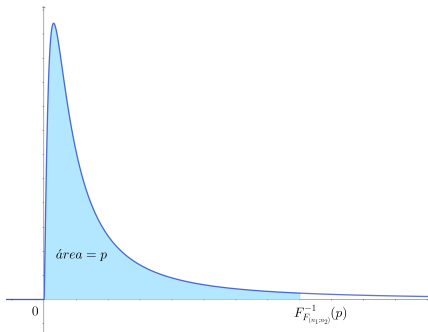
- $E(X) = \frac{n_2}{n_2 - 2}$, se $n_2 > 2$ e $V(X) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2 - 2)^2(n_2 - 4)}$, se $n_2 > 4$.

Distribuição F-Snedecor (cont.)

- A expressão

$$F_{F(n_1; n_2)}^{-1}(p)$$

representa o valor da variável aleatória X para o qual a probabilidade acumulada é p :



- Note-se que

$$F_{F(n_1; n_2)}^{-1}(p) = \frac{1}{F_{F(n_2; n_1)}^{-1}(1 - p)}$$

Nosso objetivo agora é **construir intervalos de confiança** que, com uma determinada probabilidade, contenham o verdadeiro valor do **parâmetro populacional** θ . Estes intervalos fornecem uma estimativa do intervalo provável para o parâmetro, com base nos dados da amostra, oferecendo uma margem de incerteza controlada.

Estimação intervalar (cont.)

Intervalo Aleatório de Confiança (IAC)

Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população X com função de probabilidade $f(x; \theta)$, com θ parâmetro desconhecido. Sejam $T_1 = T_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ e $T_2 = T_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ duas estatísticas, tal que $T_1 < T_2$. Um **intervalo aleatório de confiança** $1 - \alpha$ para θ é um intervalo $[T_1, T_2]$ tal que

$$P(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1 - \alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \text{ onde}$$

- $1 - \alpha$ é o **nível de confiança**.
- α é o **nível de significância**.

Intervalo de confiança (IC)

Dada uma amostra particular $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, a concretização do intervalo aleatório de confiança para θ com nível de confiança $(1 - \alpha) \times 100\%$ é denominado por **intervalo de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para θ** e é dado por

$$[t_1 = T_1(x_1, x_2, \dots, x_n), t_2 = T_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

Interpretação do nível de confiança

- O nível de confiança é a probabilidade $1 - \alpha$ (normalmente expressa como valor percentual equivalente) do intervalo aleatório de confiança conter o valor do parâmetro populacional θ ;
- O nível de significância α ($\alpha \in]0, 1[$) é a probabilidade do intervalo aleatório de confiança não conter o valor do parâmetro populacional θ ;
- Para o intervalo de confiança, o nível de confiança indica a proporção de vezes que os intervalos observados, $[t_1, t_2]$, contêm o parâmetro θ ;
- **Interpretação do intervalo de confiança determinista:** Se seleccionássemos 100 amostras diferentes de tamanho n da população e construíssemos um intervalo com 95% de confiança análogo para cada amostra, 95 desses intervalos conteriam efetivamente o parâmetro populacional θ .

Observação

$$P(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1 - \alpha$$

significa o seguinte:
sendo

- m = número de observações repetidas de $(X_1, \dots, X_n)$
- $k(m)$ = número de intervalos $[t_1, t_2]$ que contêm θ

então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{k(m)}{m} = 1 - \alpha.$$

Note que $1 - \alpha \neq P(t_1 \leq \theta \leq t_2) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta \in [t_1, t_2] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Nível de confiança

- Quanto menor for a amplitude de um intervalo de confiança, maior será sua precisão.
- Idealmente, deseja-se um intervalo de confiança com amplitude reduzida e um alto nível de confiança.
- Entretanto, para um tamanho de amostra fixo, um aumento no nível de confiança resulta em uma maior amplitude do intervalo.
- Os níveis de confiança mais comuns que oferecem um bom equilíbrio entre precisão (refletida pela amplitude do intervalo) e confiabilidade (expressa pelo nível de confiança) são: 90%, 95% e 99%.

Variável fulcral

Uma **variável fulcral** é uma função da amostra aleatória $(X_1, \dots, X_n)$ e do parâmetro θ com distribuição de probabilidade independente de θ .

Etapas para construir um intervalo de confiança

- 1 Definir o parâmetro que será estimado.
- 2 Determinar o tipo de população que está sendo analisada.
- 3 Escolher o nível de confiança desejado.
- 4 Estabelecer o tamanho da amostra.
- 5 Escolher a variável fulcral, que é a estatística amostral que permite estimar o parâmetro, e a respetiva distribuição amostral.
- 6 Construir o intervalo aleatório de confiança a partir da variável fulcral.
- 7 A partir dos dados da amostra observada, calcular os limites do intervalo de confiança, obtendo o intervalo final.
- 8 Interpretar os resultados e apresentar uma conclusão.

Intervalo de Confiança para o Valor Esperado, Variância Conhecida

Na obtenção de um intervalo de confiança para o valor esperado de uma população com variância conhecida, distinguiremos dois casos:

- 1 população normal;
- 2 população com distribuição arbitrária e dimensão da amostra suficientemente grande ($n \geq 30$).

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de Confiança para μ de uma população normal com σ^2 conhecida

Situação

- População: $X \sim N(\mu, \sigma)$
- $E(X) = \mu$ (desconhecido - parâmetro a estimar)
- $V(X) = \sigma^2$ (conhecida)
- $(X_1, \dots, X_n)$ (amostra aleatória de dimensão n de X)
- $\bar{X}$ (estimador pontual de μ)

Obtenção da variável fulcral

Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população $N(\mu, \sigma)$ em que o valor de σ^2 é conhecido.

Já vimos que

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \iff Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Note que Z é uma função da a.a. e do parâmetro desconhecido μ com distribuição conhecida e que não depende de μ . Logo, é nossa variável fulcral.



Método da Variável Fulcral (cont.)

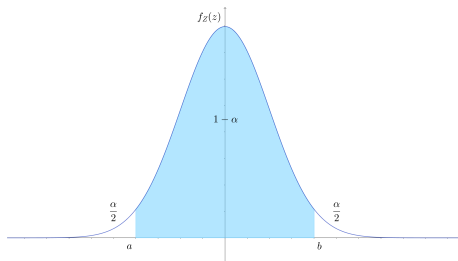
Obtenção dos quantis de probabilidade

Fixado $0 < \alpha < 1$, determinemos a e b tais que

$$P(a \leq Z \leq b) = 1 - \alpha$$

Como, em geral, existe uma infinidade de pares de valores (a, b) nessas condições, a opção mais comum consiste em escolher (a, b) tais que

$$P(Z < a) = P(Z > b) = \frac{\alpha}{2}$$



Método da Variável Fulcral (cont.)

Assim, precisamos determinar a e b tais que

$$\begin{cases} P(a \leq Z \leq b) &= 1 - \alpha \\ P(Z < a) = P(Z > b) &= \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Da segunda igualdade segue que $a = \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e $b = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$. Pela simetria da normal, tem-se $a = -b$.

Resolvendo a desigualdade

Resolvendo a desigualdade anterior em ordem a μ :

$$\begin{aligned} P(a \leq Z \leq b) = 1 - \alpha &\iff P\left(-b \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq b\right) = 1 - \alpha \\ &\iff P\left(-b \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X} - \mu \leq b \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \\ &\iff P\left(\bar{X} - b \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + b \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \\ &\iff P\left(\mu \in \left[\bar{X} - b \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + b \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Obtém-se assim:

$$IAC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu) = \left[\bar{X} - b \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + b \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

um **intervalo aleatório de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para μ** .

Substituindo $\bar{X}$ por $\bar{x}$ (valor observado da média de uma amostra aleatória) passamos a ter um intervalo concreto, ou seja:

$$IC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu) = \left[\bar{x} - b \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + b \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

o **intervalo de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para μ** .

Exemplo: Um grupo de estudantes de Engenharia Física está a investigar a densidade de um novo material utilizado em dispositivos de alta precisão. Para tal, realizaram 10 medições independentes da densidade (em g/cm^3) do material, sob condições experimentais controladas. Assume-se que a densidade do material segue uma distribuição normal, com desvio padrão conhecido de 0.5 g/cm^3 . As medições obtidas foram: 3.2, 3.5, 3.7, 3.9, 3.4, 3.6, 3.8, 3.3, 3.5, 3.7.

- (a) Determine um intervalo de confiança de 95% para a média da densidade do material.
- (b) Determinar qual a menor dimensão da amostra, n , que permite garantir com 95% de confiança que $|\bar{x} - \mu| \leq 0.25$.

Método da Variável Fulcral (cont.)

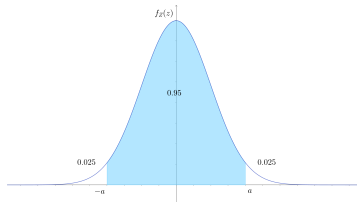
Resolução (a):

- X – “densidade do novo material”
- $X \sim N(\mu, 0.5)$
- μ – desconhecida
- $\sigma = 0.5$ – conhecido
- $n = 10$, $\bar{x} = 3.56$
- Nível de confiança: $1 - \alpha = 0.95$
- Variável fulcral: $\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$
- $a = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) = \Phi^{-1}(1 - \frac{0.05}{2}) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ (tabela ou calculadora)
- $P\left(-a \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq a\right) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(\bar{X} - 1.96 \frac{0.5}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.96 \frac{0.5}{\sqrt{10}}\right) = 0.95$
- $IAC_{95\%}(\mu) = \left[\bar{X} - 1.96 \frac{0.5}{\sqrt{10}}, \bar{X} + 1.96 \frac{0.5}{\sqrt{10}}\right]$

Método da Variável Fulcral (cont.)

- Como $\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 3.56$, temos

$$\begin{aligned} IC_{95\%}(\mu) &= \left[\bar{x} - 1.96 \frac{0.5}{\sqrt{10}}, \bar{x} + 1.96 \frac{0.5}{\sqrt{10}} \right] \\ &= \left[3.56 - 1.96 \frac{0.5}{\sqrt{10}}, 3.56 + 1.96 \frac{0.5}{\sqrt{10}} \right] \\ &= [3.25, 3.87] \end{aligned}$$



Estima-se, com um nível de confiança de 95%, que a densidade média do novo material se situe entre 3.25 g/cm³ e 3.87 g/cm³.

Método da Variável Fulcral (cont.)

Resolução (b):

$$IC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu) = \left[\bar{x} - a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \Leftrightarrow |\bar{x} - \mu| \leq a \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Podemos determinar n tal que (a margem de erro é no máximo de 0.25)

$$a \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.25 \iff n = \left(\frac{a\sigma}{0.25} \right)^2$$

Como $a = 1.96$ e $\sigma = 0.5$, obtém-se $n = 15.36 \approx 16$.

Portanto $n = 16$.

Exemplo: Considere uma amostra aleatória $(X_1, \dots, X_n)$ de uma população $N(\mu, 9)$. Se o intervalo aleatório de confiança para μ é $[\bar{X} - 18/\sqrt{n}, \bar{X} + 18/\sqrt{n}]$, qual é o nível de confiança do intervalo?

Método da Variável Fulcral (cont.)

Resolução: Sabemos que o IAC é da forma

$$IAC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu) = \left[\bar{X} - \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \frac{9}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \frac{9}{\sqrt{n}} \right]$$

Assim,

$$\Phi^{-1}(1 - \alpha/2) \frac{9}{\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \Phi^{-1}(1 - \alpha/2) = \frac{18}{9} = 2 \Leftrightarrow 1 - \alpha/2 = \Phi(2).$$

Pela tabela ou calculadora tem-se $\Phi(2) = 0.9772$. Logo

$$\alpha/2 = 1 - 0.9772 \Leftrightarrow \alpha = 0.0456.$$

Portanto,

$$1 - \alpha = 0.9544.$$

Observação

- Será que podemos afirmar que

$$P(3.25 \leq \mu \leq 3.87)? \quad \text{NÃO!}$$

- O intervalo de confiança (numérico) obtido pode não conter o valor verdadeiro de μ .
- Para um número muito grande de $IC_{(1-\alpha) \times 100\%}$, se espera que aproximadamente uma proporção $1 - \alpha$ contenha o verdadeiro valor de μ .
- Quanto menor for o comprimento do IC maior será a precisão da média.
- Se aumentarmos o nível de confiança $(1 - \alpha)$ com n e σ fixos, aumenta b e consequentemente o comprimento do IC.
- Quando n aumenta, mantendo fixos $1 - \alpha$ e σ , o comprimento do IC diminui.

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de Confiança para μ de uma população arbitrária com σ^2 conhecida e dimensão da amostra suficientemente grande $n \geq 30$

Situação

- População: X arbitrária com $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$
- μ (desconhecido - parâmetro a estimar)
- σ^2 (conhecida)
- $(X_1, \dots, X_n)$ (amostra aleatória de dimensão $n \geq 30$ de X)
- $\bar{X}$ (estimador pontual de μ)

Obtenção da variável fulcral

Teremos do TLC a seguinte variável fulcral

$$\bar{X} \stackrel{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \iff Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo aleatório de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para μ

$$\text{IAC}_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu) \simeq \left[\bar{X} - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Intervalo de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para μ

$$\text{IC}_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu) \simeq \left[\bar{x} - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Intervalos de Confiança para a Diferença entre dois Valores Esperados, Variâncias Conhecidas

Tal como anteriormente, distinguiremos dois casos:

- 1 duas populações independentes, com distribuições normais,
- 2 duas populações independentes, com distribuições arbitrárias e dimensões das duas amostras suficientemente grandes,

sendo que as variâncias são conhecidas em qualquer dos casos.

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de confiança para a **diferença entre valores esperados** de duas **populações normais independentes** com **variâncias conhecidas**

Situação

- $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ independentes
- $(\mu_1 - \mu_2)$ desconhecido
- σ_1^2 e σ_2^2 conhecido
- $(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1})$ e $(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2})$ amostra aleatória de dimensão n_1 e n_2
- $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ estimador pontual de $(\mu_1 - \mu_2)$
- Variável Fulcral

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo aleatório de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$

$$IAC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu_1 - \mu_2) = \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

Intervalo de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$

$$IAC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu_1 - \mu_2) = \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de confiança aproximado para a diferença entre valores esperados de duas populações arbitrárias (não normais) independentes com variâncias conhecidas para amostras grandes

Situação

- X_1 e X_2 independentes, com distribuições arbitrárias
- $(\mu_1 - \mu_2)$ desconhecido
- σ_1^2 e σ_2^2 conhecido
- $(X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1})$ e $(X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2})$ amostra aleatória de dimensão $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$
- $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ estimador pontual de $(\mu_1 - \mu_2)$
- Variável Fulcral

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo aleatório de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$

$$IAC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu_1 - \mu_2) \simeq \left[(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{X}_1 - \bar{X}_2) + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

Intervalo de confiança a $(1 - \alpha) \times 100\%$ para $\mu_1 - \mu_2$

$$IAC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu_1 - \mu_2) \simeq \left[(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right]$$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Quando a **população é normal** mas **σ^2 desconhecida** teremos uma outra variável fulcral. Não se pode usar a variável fulcral $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ pois σ é desconhecido. Vamos substituir σ por S (desvio padrão amostral) e usar a variável fulcral

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim ?$$

Durante muito tempo se julgou que $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ possuísse distribuição $N(0, 1)$. No entanto, para amostras pequenas, S^2 está sujeito a grandes variações, pelo que há grandes discrepâncias entre a distribuição de $\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ e $N(0, 1)$.

Teorema

Dada uma a.a. $(X_1, \dots, X_n)$ de uma população $X \sim N(\mu, \sigma)$, a variável aleatória

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

tem **distribuição t-Student com $n - 1$ graus de liberdade.**

Definição

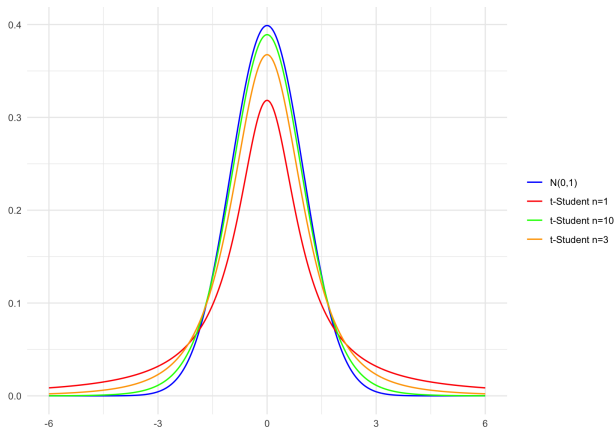
Uma variável aleatória com a função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

diz-se que tem uma **distribuição t-Student** com n graus de liberdade, $X \sim t_{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

- $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ e $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $E(T) = 0$, $n \geq 2$, $V(T) = \frac{n}{n-2}$, $n \geq 3$

Método da Variável Fulcral (cont.)



Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de Confiança para μ de uma população normal com σ^2 desconhecida

- População: $X \sim N(\mu, \sigma)$
- μ – desconhecido (parâmetro a estimar)
- σ^2 – desconhecida
- Variável fulcral: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$
- $P(a \leq T \leq b) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(-b \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq b\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(\bar{X} - b \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + b \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$
- $\text{IAC}_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu) = \left[\bar{X} - b \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + b \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$, onde
 $b = F_{t_{(n-1)}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
- $\text{IC}_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu) = \left[\bar{x} - b \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + b \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

Exemplo: Uma equipa de estudantes de Engenharia Biomédica está a investigar a densidade de uma nova biomatriz utilizada para regeneração de tecidos. Para tal, realizaram 10 medições independentes da densidade (em g/cm^3) da biomatriz, sob as mesmas condições experimentais. Assume-se que a densidade segue uma distribuição normal de média μ e desvio padrão σ . As medições obtidas foram: 3.2, 3.5, 3.7, 3.9, 3.4, 3.6, 3.8, 3.3, 3.5, 3.7. Determine um intervalo de confiança a 95% para μ .

Método da Variável Fulcral (cont.)

Resolução:

- X – densidade da nova biomatriz
- $X \sim N(\mu, \sigma)$
- $n = 10$
- $\bar{x} = 3.56$
- $s = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\bar{x}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^{10} x_i^2) - 10\bar{x}^2}{9}} = 0.222$
- Variável fulcral: $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$
- $b = F_{t_{(9)}}^{-1}(0.975) = 2.262$ (tabela ou calculadora)
- $IC_{95\%}(\mu) = \left[3.56 - 2.262 \frac{0.222}{\sqrt{10}}, 3.56 + 2.262 \frac{0.222}{\sqrt{10}} \right] = [3.40, 3.72]$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de Confiança para μ de uma população arbitrária com σ^2 desconhecida

- População: X arbitrária com $n \geq 30$
- μ – desconhecido (parâmetro a estimar)
- σ^2 – desconhecida
- Variável fulcral: $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$
- $P(a \leq Z \leq b) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(-b \leq \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq b\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(\bar{X} - b \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + b \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$
- $\text{IAC}_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu) \simeq \left[\bar{X} - b \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{X} + b \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$, onde
 $b = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
- $\text{IC}_{(1-\alpha) \times 100\%}(\mu) \simeq \left[\bar{x} - b \frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + b \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

Método da Variável Fulcral (cont.)

- Considere-se uma população $X \sim N(\mu, \sigma)$ com μ e σ^2 desconhecidos e $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de X .
- Queremos determinar $IC_{(1-\alpha) \times 100\%}(\sigma^2)$.
- Estimador pontual de σ^2 é S^2 .
- A variável fulcral obtém-se do teorema abaixo.

Teorema

Dada uma amostra aleatória $(X_1, \dots, X_n)$ de uma população $X \sim N(\mu, \sigma)$, a variável aleatória

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$$

tem **distribuição do qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade.**

Definição

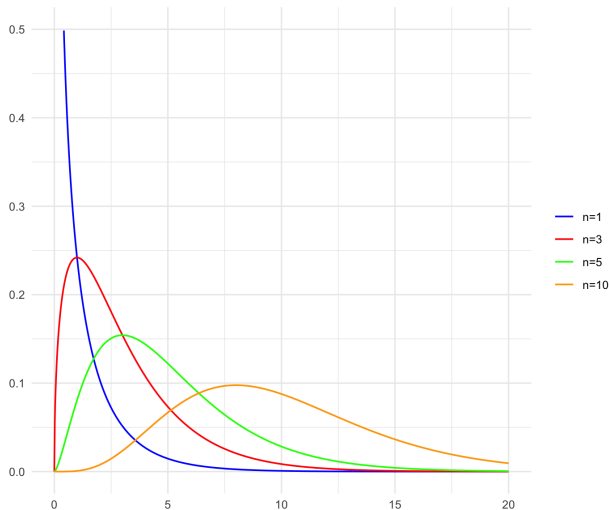
Uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0,$$

diz-se que tem uma **distribuição do qui-quadrado** com n graus de liberdade, $X \sim \chi^2_{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

- $E(X) = n$, $V(X) = 2n$

Método da Variável Fulcral (cont.)



Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de Confiança para a **variância** de uma população **normal** com μ **desconhecido**

- População: $X \sim N(\mu, \sigma)$
- μ – desconhecido
- σ^2 – desconhecida (parâmetro a estimar)
- Variável fulcral: $Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$
- $P(a \leq Q \leq b) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b\right) = 1 - \alpha$
- $P\left(\frac{(n-1)S^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{a}\right) = 1 - \alpha$
- $\text{IAC}_{(1-\alpha) \times 100\%}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a}\right]$ onde
 $a = F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e $b = F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
- $\text{IC}_{(1-\alpha) \times 100\%}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)s^2}{F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}, \frac{(n-1)s^2}{F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right]$
- $\text{IC}_{(1-\alpha) \times 100\%}(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{F_{\chi^2_{(n-1)}}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}\right]$

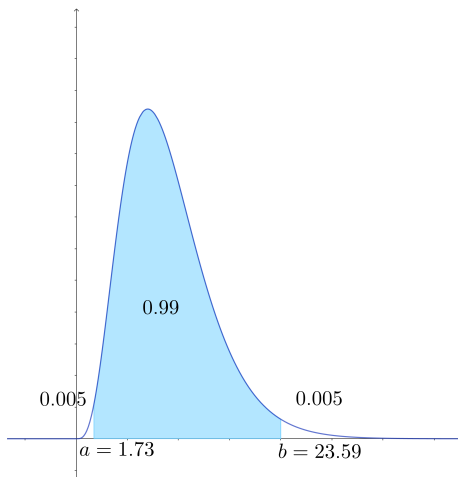
Exemplo: Uma equipa de estudantes de Engenharia Física está a investigar a densidade de um novo material utilizado em aplicações de alta precisão. Para tal, realizaram 10 medições independentes da densidade (em g/cm^3) do material, sob as mesmas condições experimentais. Assume-se que a densidade segue uma distribuição normal de média μ e desvio padrão σ . As medições obtidas foram: 3.2, 3.5, 3.7, 3.9, 3.4, 3.6, 3.8, 3.3, 3.5, 3.7. Determine um intervalo de confiança a 99% para σ .

Método da Variável Fulcral (cont.)

Resolução:

- X – densidade do novo material
- $X \sim N(\mu, \sigma)$
- μ – desconhecida
- σ^2 – desconhecida (parâmetro a estimar)
- $n = 10$
- $s = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\bar{x}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{(\sum_{i=1}^{10} x_i^2) - 10\bar{x}^2}{9}} = 0.222$
- Variável fulcral: $Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-1)}$
- $a = F_{\chi^2_{(9)}}^{-1}(0.005) = 1.735$
 $b = F_{\chi^2_{(9)}}^{-1}(0.995) = 23.59$
- $IC_{99\%}(\sigma^2) = \left[\frac{9 \times 0.222}{23.59}, \frac{9 \times 0.222}{1.735} \right] = [0.084, 1.151]$ e $IC_{99\%}(\sigma) = [0.289, 1.072]$

Método da Variável Fulcral (cont.)



Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de Confiança aproximado para uma **probabilidade** (ou **proporção**)

- População: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$
- $(X_1, \dots, X_n)$ a.a., $n \geq 30$
- Variável fulcral: $Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$
- $P(a \leq Z \leq b) \simeq 1 - \alpha \Leftrightarrow P\left(-b \leq \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \leq b\right) \simeq 1 - \alpha$
- $P\left(\bar{X} - b\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} \leq p \leq \bar{X} + b\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right) \simeq 1 - \alpha$
- $\text{IAC}_{(1-\alpha) \times 100\%}(p) \simeq \left[\bar{X} - b\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + b\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right]$, onde $b = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$
- $\text{IC}_{(1-\alpha) \times 100\%}(p) = \left[\bar{X} - b\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}, \bar{X} + b\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}\right]$

Exemplo: Um inquérito recente feito a 1000 habitantes de uma região rural revelou que 448 apoiam a aplicação de penas de prisão pesadas em crimes de fogo posto. Construa um IC aproximado a 95% para a probabilidade (p) de uma pessoa escolhida ao acaso na referida região ser favorável à aplicação da referida pena.

Método da Variável Fulcral (cont.)

Resolução:

- Variável de interesse:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se a pessoa for favorável à aplic. da referida pena} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

- p – desconhecido

- $n = 1000 \geq 30$

- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{448}{1000} = 0.448$

- Variável fulcral: $Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$

- $b = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$

- $IC_{95\%} \simeq \left[0.448 - 1.96 \sqrt{\frac{0.448(1-0.448)}{1000}}, 0.448 + 1.96 \sqrt{\frac{0.448(1-0.448)}{1000}} \right]$
 $\simeq [0.417178, 0.478822]$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Situação	Estimador pontual	Variável aleatória fulcral
1. Intervalo de confiança para a média de uma população normal, variância conhecida $X \sim N(\mu, \sigma)$	$\hat{\mu} = \bar{X}$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$
2. Intervalo de confiança para a média de uma população normal, variância desconhecida $X \sim N(\mu, \sigma)$	$\hat{\mu} = \bar{X}$	$T = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$
3. Intervalo de confiança para a variância de uma população normal $X \sim N(\mu, \sigma)$	$\hat{\sigma}^2 = S^2$	$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{(n-1)}^2$
4. Intervalo de confiança para uma proporção $X \sim Ber(p)$	$\hat{p} = \bar{X}$	$Z = \frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}}} \sim N(0, 1)$

Veja o formulário completo desta parte no Moodle.

- Manuel Cabral Morais (2020): Probabilidade e Estatística: Teoria, Exemplos & Exercícios. IST Press, 1a edição.