Modelos Teóricos Contínuos

Introdução às Probabilidades e Estatística

Sumário

1. Modelo Uniforme Contínuo

Definição (Distribuição Uniforme Contínua)

A variável aleatória contínua X diz-se ter **distribuição uniforme contínua** no intervalo (a, b) (onde $a < b$), se sua f.d.p. for dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x \leq a \vee x \geq b \end{cases}.$$

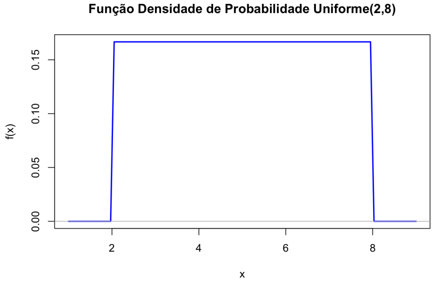
A função de distribuição de X é dada por

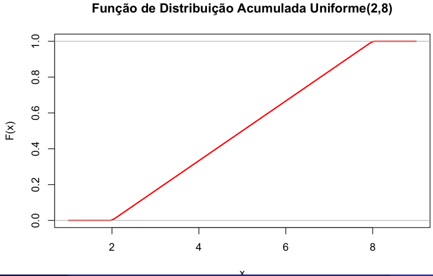
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}.$$

Notação

- $X \sim \text{Uniforme}(a, b)$
- $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Distribuição Uniforme Contínua (cont.)





Distribuição Uniforme Contínua (cont.)

Exemplo: Uma equipa de engenheiros biomédicos está a estudar a espessura de uma camada de tecido regenerado após um procedimento de bioengenharia. As medições feitas em diferentes regiões do tecido indicam que a espessura é uniformemente distribuída entre 2 mm e 8 mm. Com base nessa informação, responda às seguintes questões:

(a) Determine a função densidade de probabilidade (f.d.p) e a função de distribuição acumulada (f.d.) para a espessura X do tecido regenerado.

(b) Calcule a probabilidade de que a espessura do tecido seja menor que 4 mm.

(c) Calcule a probabilidade de que a espessura do tecido esteja entre 3 mm e 5 mm.

(d) Determine a probabilidade de que a espessura do tecido seja maior que 7 mm.

(e) Calcule o valor esperado e a variância da espessura X.

Resolução:

(a)

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & 2 < x < 8 \\ 0, & c.c. \end{cases}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2 \\ \frac{x-2}{6}, & 2 < x < 8 \\ 1, & x \geq 8. \end{cases}$$

Resolução (cont.)

(b)

$$P(X < 4) = \int_{-\infty}^{4} f_X(x)\,dx = \int_{2}^{4} \frac{1}{6}\,dx = \left[\frac{x}{6}\right]_2^4 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333$$

ou

$$P(X < 4) = F_X(4) = \frac{4-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333$$

Em R: > `punif(4,2,8)` → [1] 0.3333

(c)

$$P(3 < X < 5) = \int_{3}^{5} \frac{1}{6} = \left[\frac{x}{6}\right]_3^5 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333$$

ou

$$P(3 < X < 5) = F_X(5) - F_X(3) = \frac{5-2}{6} - \frac{3-2}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.333$$

Em R: > `punif(5,2,8)-punif(3,2,8)` → [1] 0.3333

Resolução (cont.)

(d)

$$P(X > 7) = \int_{7}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_{7}^{8} \frac{1}{6}\, dx = \left[\frac{x}{6}\right]_7^8 = \frac{1}{6} = 0.166$$

ou

$$P(X > 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - F_X(7) = 1 - \frac{7-2}{6} = \frac{1}{6} = 0.166$$

Em R: > `punif(7,2,8,lower.tail = FALSE)` $\rightarrow$ [1] 0.1666

(e)

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{2+8}{2} = 5$$
$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{6^2}{12} = 3$$

2. Modelo Exponencial

Definição (Distribuição Exponencial)

Uma variável aleatória contínua X diz-se ter **distribuição exponencial** de parâmetro $\lambda > 0$, se a sua f.d.p. for dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

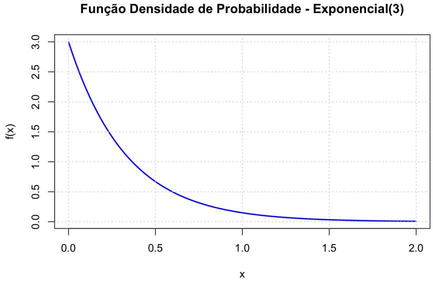
A função de distribuição de X é dada por

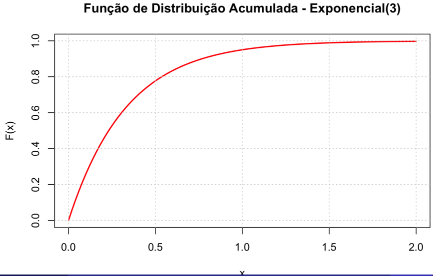
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Notação

- $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$
- $E(x) = \frac{1}{\lambda}$
- $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
- É frequentemente utilizada na caracterização da duração de equipamento, modelação dos tempos entre ocorrências consecutivas de eventos do mesmo tipo, por exemplo, chegadas de clientes a um sistema, falhas mecânicas, colisões, etc.

Distribuição Exponencial (cont.)





Distribuição Exponencial (cont.)

Propriedade de falta de memória

Se $X \sim \text{Exponencial}(\lambda)$, então

$$P(X > t + h | X > t) = P(X > h), \quad \forall t, h \geq 0;$$
$$P(X \leq t + h | X > t) = P(X \leq h), \quad \forall t, h \geq 0.$$

Teorema

Seja X uma v.a. que representa o número de ocorrências por unidade de tempo (comprimento, área, etc.) de um qualquer fenómeno e Y uma outra v.a. que representa o tempo entre as ocorrências sucessivas (ou intervalo de tempo até a primeira ocorrência).

$$\text{Se } X \sim \text{Poisson}(\lambda) \text{ então } Y \sim \text{Exponencial}(\lambda).$$

- A exponencial não é indicada para modelar situações do tipo tempo de vida em que há desgaste ou envelhecimento.

Distribuição Exponencial (cont.)

Exemplo: Sabe-se que o intervalo de tempo médio (em horas) entre chamadas num call center é de 12 minutos e que esse tempo entre as chamadas tem distribuição exponencial.

(a) Qual a probabilidade do intervalo de tempo ser superior a 20min?

(b) Qual a probabilidade do intervalo de tempo ser superior a 20min e inferior a 40min?

Respostas: **(a)** 0.188; **(b)** 0.1532

Exemplo: Os geólogos estão a estudar a frequência de ocorrência de pequenos tremores de terra numa região específica. Eles observaram que, em média, ocorrem 2 pequenos tremores de terra por mês nessa região. O tempo entre esses tremores pode ser modelado por uma distribuição exponencial.

(a) Qual é a taxa de ocorrência (λ) de pequenos tremores de terra por mês?

(b) Qual é a função densidade de probabilidade (f.d.p.) e função de distribuição (f.d.) para o tempo X entre os tremores de terra?

(c) Qual é a probabilidade de que o tempo entre dois tremores de terra seja inferior a 15 dias?

(d) Qual é a probabilidade de que o tempo entre dois tremores de terra esteja entre 15 e 30 dias?

(e) Calcule o valor esperado e a variância do tempo entre dois tremores de terra.

Resolução: (a)

Variável aleatória
$X =$ "Tempo (em meses) entre os dois pequenos tremores"

Taxa λ
Taxa de $\lambda = 2$ tremores por mês, ou seja, temos em média $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 0.5$ meses (ou 15 dias) por tremor.

$$X \sim \text{Exponencial}(\lambda = 2)$$

(b)
Função densidade de probabilidade de X

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Função de distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Resolução (cont.):

(c)

$$P\left(X < \frac{15}{30}\right) = P(X < 0.5) = F_X(0.5) = 1 - e^{-2\cdot 0.5} = 0.6321$$

Em R: > `pexp(0.5,2)` → [1] 0.6321206

(d)

$$\begin{aligned} P\left(\frac{15}{30} < X < \frac{30}{30}\right) &= P(0.5 < X < 1) = F_X(1) - F_X(0.5) \\ &= 1 - e^{-2\cdot 1} - (1 - e^{-2\cdot 0.5}) \\ &= e^{-2\cdot 0.5} - e^{-2\cdot 1} \\ &= 0.2325 \end{aligned}$$

Em R: > `pexp(1,2)-pexp(0.5,2)` → [1] 0.2325442

Resolução (cont.):

(e)

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{2^2} = 0.25$$

3. Modelo Normal

Distribuição Normal

Definição (Distribuição Normal)

A variável aleatória contínua X diz-se ter **distribuição normal** de parâmetros μ e $\sigma > 0$, se sua f.d.p for dada por

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A **função de distribuição** de X é dada por

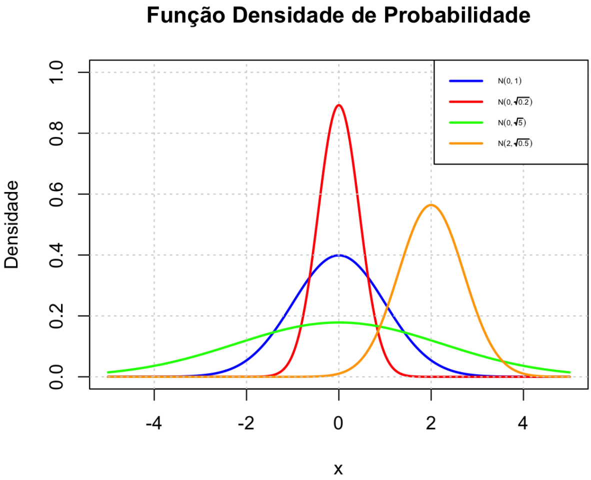
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}^+$$

Este integral só pode ser calculado recorrendo a métodos numéricos (ou mudança de variável para $\mathbb{R}^2$).

Notação

- $X \sim N(\mu, \sigma)$
- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

Ciências ULisboa



Função Densidade de Probabilidade
Densidade
x
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
-4
-2
0
2
4
N(0, 1)
N(0, √0.2)
N(0, √5)
N(2, √0.5)

Distribuição Normal (cont.)

Teorema (Distribuição normal reduzida)

Se $X \sim N(\mu, \sigma)$ então $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. Z diz-se ter **distribuição normal reduzida** de parâmetros 0 e 1 com f.d.p. dada por

$$\phi(z) = f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

A **função de distribuição** de Z é dada por

$$\Phi(z) = F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt, \quad z \in \mathbb{R}.$$

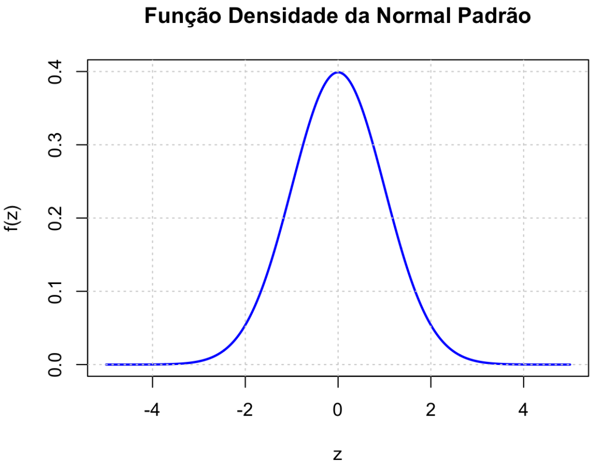
Esta distribuição está tabelada.

Notação

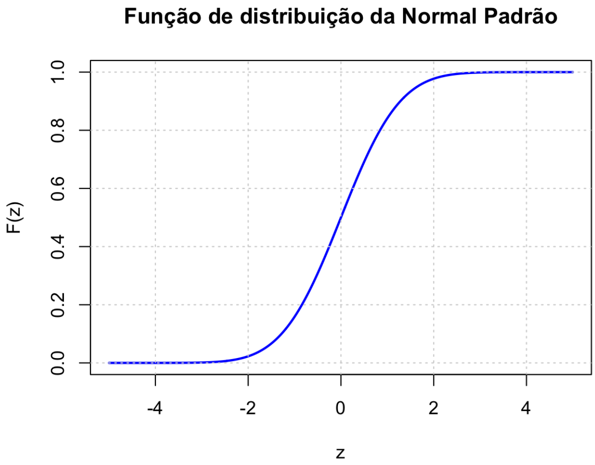
- $Z \sim N(0,1)$
- $E(Z) = 0$
- $V(Z) = 1$
- Propriedade da simetria:
  Se $Z \sim N(0,1)$, então $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}$.

Ciências ULisboa

Distribuição Normal (cont.)



Distribuição Normal (cont.)



Distribuição Normal (cont.)

Cálculo de Probabilidades na Distribuição Normal Padrão

- Seja $X \sim N(\mu, \sigma)$. Então $Z \sim N(0, 1)$.
- Sendo $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_X(a) = P(X \leq a) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

- Sendo $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

Ciências ULisboa

Distribuição Normal (cont.)

Seja $X \sim N(\mu = 10, \sigma = 2)$.

$$\begin{aligned}
P(X \leq 10) &= P\left(\frac{X-10}{2} \leq \frac{10-10}{2}\right) \\
&= P(Z \leq 0) \\
&= \Phi(0) \\
&= 0.5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \leq 8) &= P\left(\frac{X-10}{2} \leq \frac{8-10}{2}\right) \\
&= P(Z \leq -1) \\
&= \Phi(-1) \\
&= 1 - \Phi(1) \\
&= 1 - 0.8413 \\
&= 0.1587
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 12) &= P\left(\frac{X-10}{2} \geq \frac{12-10}{2}\right) \\
&= P(Z \geq 1) \\
&= 1 - P(Z < 1) \\
&= 1 - \Phi(1) \\
&= 1 - 0.8413 \\
&= 0.1587
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 9) &= P\left(\frac{X-10}{2} \geq \frac{9-10}{2}\right) \\
&= P(Z \geq -0.5) \\
&= 1 - P(Z < -0.5) \\
&= 1 - \Phi(-0.5) \\
&= 1 - (1 - \Phi(0.5)) \\
&= \Phi(0.5) \\
&= 0.6915
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(8 \leq X \leq 12) &= P\left(\frac{8-10}{2} \leq \frac{X-10}{2} \leq \frac{12-10}{2}\right) \\
&= P(-1 \leq Z \leq 1) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) \\
&= 2\Phi(1) - 1 \\
&= 6826
\end{aligned}$$

Ciências ULisboa

Distribuição Normal (cont.)

Exemplo: Uma equipa de físicos está a estudar a distribuição do raio de partículas subatómicas numa amostra de plasma em laboratório. Suponha que o raio dessas partículas (em femtómetros) segue uma distribuição normal com média $\mu = 0.5$ fm e desvio padrão $\sigma = 0.1$ fm.

(a) Qual é a probabilidade de que uma partícula selecionada aleatoriamente tenha um raio inferior a 0.4 fm?

(b) Qual é a probabilidade de que o raio de uma partícula esteja entre 0.4 fm e 0.6 fm?

(c) Qual é a probabilidade de que o raio de uma partícula seja superior a 0.6 fm?

(d) Se um experimento de física nuclear exige que pelo menos 95% das partículas tenham um raio superior a 0.3 fm, esta amostra de plasma é adequada para o experimento?

Respostas: **(a)** 0.1587; **(b)** 0.6826; **(c)** 0.1587

Teorema da Aditividade da Normal

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias **independentes** com $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Então

$$Y = a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n = \sum_{i=1}^{n} a_iX_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2}\right)$$

com $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Corolário

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias **independentes e identicamente distribuídas (i.i.d)** com $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Então

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, \sqrt{n\sigma^2})$$

e

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$$

Exemplo: Um elevador de acesso à galeria de uma mina tem capacidade nominal de 3800kg. Admita que a v.a. $X =$ "peso do mineiro que usa o elevador" tem distribuição normal com valor esperado 75kg e desvio padrão 8kg. Qual é a probabilidade de ser excedida a capacidade nominal do elevador quando nele se encontram 50 mineiros? Admita que o peso dos mineiros são independentes.

Resposta: 0.1886

Referências

- Manuel Cabral Morais (2020): Probabilidade e Estatística: Teoria, Exemplos & Exercícios. IST Press, 1a edição.

Ciências ULisboa