Estatística Descritiva e Análise Exploratória dos Dados

Elementos de Probabilidades e Estatística

Ciências ULisboa

Sumário

Ciências ULisboa

1. Conceitos Fundamentais de Estatística

Conceitos Fundamentais de Estatística

- A **Estatística** é um conjunto de métodos apropriados para recolher, classificar, organizar, analisar e interpretar conjuntos de dados, tendo em vista o conhecimento de determinado fenómeno e a possibilidade de, a partir desse conhecimento, inferir possíveis novos resultados.
- É amplamente utilizada em diversas áreas como ciência, economia, medicina, engenharia, psicologia e ciências sociais.

Ciências ULisboa

Conceitos Fundamentais de Estatística (cont.)

- As aplicações da estatística podem ser divididas em duas grande áreas:
- **Estatística descritiva**: conjunto de técnicas que visam a exploração dos dados para identificar padrões, resumir informações e apresentá-las de forma conveniente para o utilizador.
- **Inferência Estatística**: conjunto de técnicas que visam a utilização de um conjunto representativo de dados para fazer estimativas, tomar decisões, fazer previsões ou outras generalizações sobre um conjunto maior de dados.

Ciências ULisboa

Conceitos Fundamentais de Estatística (cont.)

Caracterização de um conjunto de espectadores de um programa de TV.

Espectador	Género	Idade	Habilitações Escolares	Salário Mensal	Residência
A	M	23	12º ano	900	Lisboa
B	M	19	9º ano	580	Lisboa
C	M	36	Licenciatura	3120	Porto
D	F	42	Licenciatura	2450	Leiria
E	F	21	9º ano	940	Lisboa
F	M	61	6º ano	580	Lisboa
G	F	28	12º ano	1230	Faro
H	F	52	9º ano	630	Sintra
I	M	32	12º ano	1200	Porto
J	M	46	12º ano	1200	Gaia
K	M	28	Licenciatura	2050	Braga
L	F	29	12º ano	1050	Viseu

Tabela: Dados dos espectadores: Género: M = masculino, F = feminino; Idade: em anos; Salário Mensal: em euros.

- Que possíveis padrões de audiência terá interesse procurar?
- Esses padrões são imediatamente identificáveis?
- Que representações dos dados poderiam destacar os possíveis padrões?
- O conjunto de espectadores inquirido será representativo da totalidade dos espectadores do programa?
- Poderiam as conclusões da análise deste conjunto de espectadores ser extrapoladas para a totalidade dos espectadores?

Conceitos Fundamentais de Estatística (cont.)

- A **análise exploratória dos dados (AED)** é uma etapa fundamental na estatística. A sua finalidade é
  - examinar os dados previamente à aplicação de qualquer técnica estatística.
  - deste modo o analista consegue compreender a estrutura dos dados e identificar padrões, anomalias, relações e resumir as suas principais características, frequentemente com a ajuda de métodos gráficos.
- Após a coleta e a inserção de dados numa base de dados apropriada, o próximo passo é a análise descritiva. Esta etapa é crucial, pois permite ao investigador familiarizar-se com os dados, organizá-los e sintetizá-los, de modo a extrair as informações necessárias para responder às questões em estudo.

Ciências ULisboa

Conceitos Fundamentais de Estatística (cont.)

- A análise exploratória dos dados (AED) foi popularizada por John Tukey, um renomado estatístico americano, no final da década de 1960. Tukey introduziu o termo "Exploratory Data Analysis" e enfatizou a importância de explorar os dados antes de aplicar modelos estatísticos formais. Ele defendia que, através da AED, os analistas poderiam desenvolver uma intuição sobre os dados e suas peculiaridades, permitindo uma análise mais robusta e informada.

Figura: Foto retirada de https://en.wikipedia.org/wiki/John_Tukey

Ciências ULisboa

Conceitos Fundamentais de Estatística (cont.)

Elementos fundamentais da Estatística

- **População ou universo**: Conjunto de unidades individuais, com uma ou mais características de interesse em comum, que se pretende(m) estudar. (ex: todos os alunos da FCUL).
- **Unidade estatística**: elemento da população (ex: estudante da FCUL).
- **Variável**: característica de interesse em estudo (ex: X - altura dos estudantes da FCUL).
- **Dados**: valores observados da variável (ex: x - altura observada de um estudante da FCUL).
  - Dado bruto $\rightarrow x_i$ (dado antes de qualquer tratamento)
  - Dado ordenado $\rightarrow x_{(i)}$ (dado ordenado usualmente em ordem crescente)
- **Amostra**: subconjunto da população observada ($(x_1, \ldots, x_n) = (1.50, \ldots, 1.80)$)
- **Dimensão da amostra**: número de unidades estatísticas da amostra.

Ciências ULisboa

Conceitos Fundamentais de Estatística (cont.)

Caracterização de um conjunto de espectadores de um programa de TV.

Espectador	Género	Idade	Habilitações Escolares	Salário Mensal	Residência
A	M	23	12º ano	900	Lisboa
B	M	19	9º ano	580	Lisboa
C	M	36	Licenciatura	3120	Porto
D	F	42	Licenciatura	2450	Leiria
E	F	21	9º ano	940	Lisboa
F	M	61	6º ano	580	Lisboa
G	F	28	12º ano	1230	Faro
H	F	52	9º ano	630	Sintra
I	M	32	12º ano	1200	Porto
J	M	46	12º ano	1200	Gaia
K	M	28	Licenciatura	2050	Braga
L	F	29	12º ano	1050	Viseu

Tabela: Dados dos espectadores: Género: M = masculino, F = feminino; Idade: em anos; Salário Mensal: em euros.

- **Unidades estatísticas**: Os espectadores do programa.
- **Variáveis estatísticas**: Género, Idade, Habilitações Escolares, Salário Mensal, Residência.
- **Dados**: Os valores na tabela.
- **Dimensão da amostra**: 12 (espectadores inquiridos).

Ciências ULisboa

Tipos de Variáveis

Variável: Qualquer característica associada a uma população.

Classificação da variável:

- **Qualitativa**: é uma variável que descreve ou categoriza atributos, qualidades, ou características não numéricas de um objeto ou evento. Por exemplo,
  - a cor dos olhos,
  - o nome de um partido político,
  - o tipo de transporte usado para ir pro trabalho.
- **Quantitativa**: é uma variável que representa quantidades mensuráveis. As variáveis quantitativas fornecem valores numéricos que permitem a realização de cálculos matemáticos e análises estatísticas mais detalhadas. Os valores que essas variáveis podem assumir podem ser ordenados de forma lógica e natural. Por exemplo,
  - tamanho dos sapatos,
  - preço das casas,
  - número de semestres cursados,
  - peso de uma pessoa.

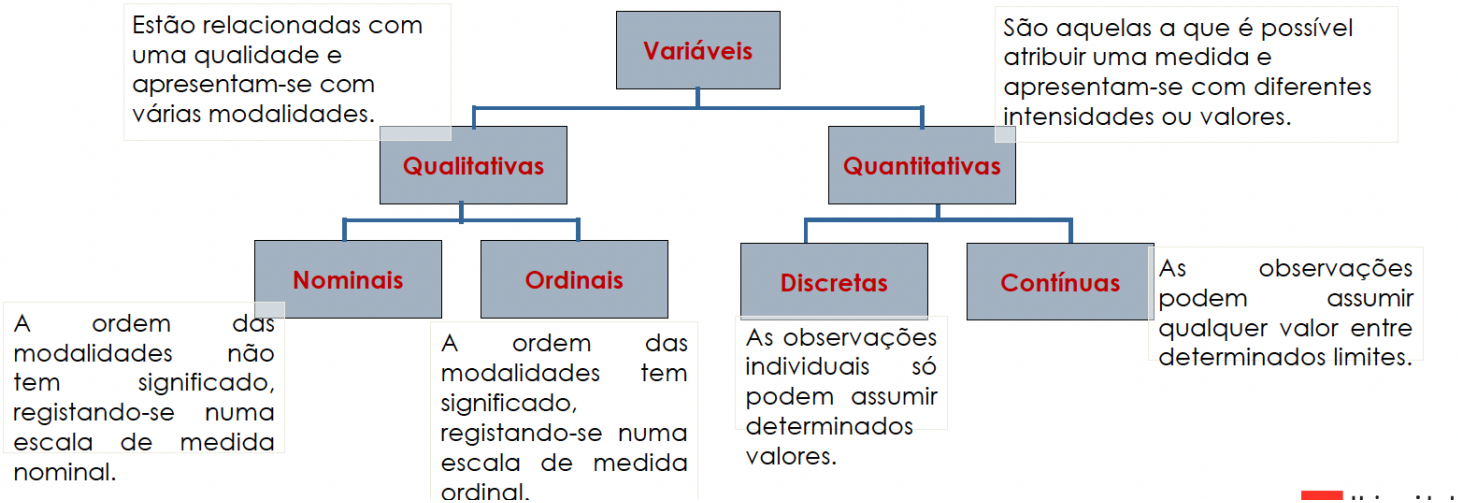
Ciências ULisboa

Tipos de Variáveis (cont.)

- **Variáveis discretas** são variáveis que só podem assumir um número finito ou infinito numerável de valores. Todas as variáveis qualitativas são discretas, como a cor dos olhos ou a região de um país. Mas também as variáveis quantitativas podem ser discretas: o tamanho dos sapatos ou o número de semestres estudados seriam discretos porque o número de valores que estas variáveis podem assumir é limitado.
- **Variáveis contínuas** são aquelas que podem assumir qualquer valor em um intervalo contínuo de valores. Exemplos são o tempo que leva para chegar à universidade, o comprimento de um cavalo e a distância entre dois planetas. Às vezes diz-se (de maneira informal) que variáveis contínuas são variáveis que são "medidas em vez de contadas".

Ciências ULisboa

Tipos de Variáveis (cont.)



Tipos de escala

As considerações anteriores indicam que diferentes variáveis contêm diferentes quantidades de informação. Uma classificação útil destas considerações é dada pelo conceito de escala de uma variável.

Principais escalas de medida:

1. Escala nominal
2. Escala ordinal
3. Escala intervalar
4. Escala absoluta ou de razão

Ciências ULisboa

Tipos de escala (cont.)

Escala nominal:

- É a mais básica e simplesmente classifica dados em categorias distintas e não ordenadas. Estas categorias, embora possam ser representadas por números, não são numéricas.
- Não há ordem ou hierarquia entre as categorias.
- Não se pode realizar operações matemáticas com esses dados.

Exemplos:

- Género: Masculino, Feminino.
- Cores de Olhos: Castanho, Azul, Verde.
- Tipos de Rochas: Ígnea, Sedimentar, Metamórfica.
- Tipo de construção: Edifício, Ponte, Barragem, Reservatório, Outros.
- Tipo de fonte primária de energia utilizada: Eólica, Carvão, Gás, Fuel, Fios de água, Albufeiras, Saldo Importador.

Ciências ULisboa

Tipos de escala (cont.)

Escala ordinal:

- A escala ordinal classifica dados em categorias, mas é possível estabelecer uma ordem ou hierarquia.
- As diferenças entre essas categorias não são mensuráveis.

Exemplos:

- Classificações de Satisfação: Insatisfeito, Neutro, Satisfeito.
- Grau de Escolaridade: Ensino Básico, Ensino Secundário, Ensino Superior.
- Níveis de Risco: Baixo, Médio, Alto.
- Qualidade das águas balneares: Má, Aceitável, Boa, Excelente.
- Dureza das rochas: Nível 1 (Rochas muito macias), Nível 2, Nível 3, Nível 4, Nível 5, Nível 6, Nível 7, Nível 8, Nível 9, Nível 10 (Rochas muito duras).

Ciências ULisboa

Tipos de escala (cont.)

Exemplo variável em escala ordinal em Ciência da Computação

No desenvolvimento de software e aplicações web, a **experiência do utilizador (UX)** pode ser avaliada usando escalas ordinais de satisfação. Um exemplo comum é a escala **System Usability Scale (SUS)**, que classifica a usabilidade percebida de um sistema ou aplicação em diferentes níveis.
Classificação da Usabilidade Percebida: Após um teste de usabilidade, os utilizadores podem ser agrupados em categorias com base nas suas respostas:

1. Inaceitável – Nível 1 (Sistema difícil de usar, frustração alta)
2. Fraco – Nível 2
3. Aceitável – Nível 3
4. Bom – Nível 4
5. Excelente – Nível 5 (Sistema intuitivo e eficiente)

- **Intervalos Não Uniformes:** Embora os níveis estejam ordenados, a diferença de usabilidade entre um sistema Fraco e um Aceitável pode ser menor do que entre um sistema Bom e um Excelente, pois melhorias na experiência do utilizador podem ter impacto de forma não linear.

Ciências ULisboa

Tipos de escala (cont.)

Escala intervalar:

- Mede dados em intervalos iguais, onde a diferença entre os valores é significativa. Não possui um ponto zero verdadeiro (ausência de zero absoluto).
- Permite operações de adição e subtração. As diferenças entre os valores são uniformes.
- A razão entre valores não tem sentido.

Exemplos:

- Escalas de temperatura: A diferença entre 20°C e 30°C é a mesma que entre 30°C e 40°C, mas 0°C não significa ausência de temperatura.
- Pontuação em Testes de Inteligência (QI): As diferenças entre pontuações são significativas, mas não existe um ponto de origem que indique ausência de inteligência. A diferença de 10 pontos de QI (por exemplo, de 100 a 110) é significativa e indica o mesmo intervalo que entre 110 e 120.

Ciências ULisboa

Tipos de escala (cont.)

Escala absoluta ou de razão:

- É semelhante à escala intervalar, mas possui um ponto zero verdadeiro, que indica a ausência completa da quantidade medida.
- Permite todas as operações aritméticas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Exemplos:

- Altura (em m)
- Peso (em Kg)
- Idade (em anos)
- Distância (em Km)
- Densidade das rochas (em g/cm^3)
- Profundidade de depósitos geológicos (em m)
- Espessura de camadas sedimentares (em m ou cm)

Ciências ULisboa

2. Tabela de Frequências e Representações Gráficas

Organização de dados

Tabela de distribuição de frequências

1ª coluna: Categorias c_i, os valores x_i, ou as classes $[c_i; c_{i+1}[$ que a variável pode assumir.

2ª coluna: Frequência Absoluta, n_i, é a contagem ou número de vezes que cada categoria ou valor da variável foi observado. Para uma amostra de tamanho n, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ (o somatório das frequências absolutas é igual ao total de observações).

3ª coluna: Frequência relativa, f_i, é a proporção com que cada categoria ou valor da variável foi observado: $f_i = \frac{n_i}{n}$.
$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$ (o somatório das frequências relativas é igual à unidade)

Colunas seguintes (apenas para variáveis quantitativas ou qualitativas ordinais): Frequência Acumulada, N_i ou F_i.

Ciências ULisboa

Organização de dados (cont.)

Tabela de distribuição de frequências

Variável $c_i, x_i, [c_i, c_{i+1}[$	**Freq. absoluta** n_i	**Freq. relativa** f_i	**Freq. absoluta acumulada** N_i	**Freq. relativa acumulada** F_i
x_1	n_1	f_1	$N_1 = n_1$	$F_1 = f_1 = N_1/n$
x_2	n_2	f_2	$N_2 = n_1 + n_2$	$F_2 = f_1 + f_2 = N_2/n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k	f_k	$N_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n$	$F_k = \sum_{i=1}^{k} f_i = N_k/n = 1$
Total	$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$	$\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$	-	-

Ciências ULisboa

Organização de dados (cont.)

Notação:

- X - Variável em estudo: representa determinada característica de uma população ou de uma amostra
- x_i - i-ésima observação da amostra $i = 1, \ldots, n$
- $x_{(i)}$ - i-ésima observação da amostra ordenada $i = 1, \ldots, n$
- n - número de elementos da amostra (dimensão da amostra)

Ciências ULisboa

Organização de dados (cont.)

Representações gráficas

- Variáveis Qualitativas (nominais/ordinais):
  - Gráfico circular/Gráfico de pizza
  - Gráfico de barras
  - Boxplot/Caixa de bigodes (ordinais)
- Variáveis Quantitativas (discretas/contínuas):
  - Gráfico de barras/Histograma
  - Boxplot/Caixa de bigodes

Ciências ULisboa

Organização de dados (cont.)

Exemplo: Estudo sobre a satisfação de um conjunto de pessoas com acesso à Internet na residência.

Estudante	Género	Idade	Salário	Agregado Familiar	Acesso à Internet	Satisfação c/ Acesso
A	F	19	1200	2	ADSL	4
B	F	20	1400	3	4G	5
C	M	21	2000	3	Fibra	3
D	M	26	1800	5	ADSL	2
E	M	30	1900	3	4G	4
F	M	37	900	3	ADSL	4
G	F	20	1300	3	ADSL	3
H	M	18	750	3	ADSL	4
I	M	25	3000	2	Fibra	5
J	F	22	2500	4	Fibra	5
K	F	20	1500	3	ADSL	3
L	M	33	2300	3	ADSL	3

Tabela: Salário em euros; Agreg. familiar: número de elementos; Satisfação com o Acesso: 1 (mín.) a 5 (máx.)

Ciências ULisboa

Organização de dados (cont.)

Classificação das variáveis do exemplo anterior em qualitativa nominal/ordinal e quantitativa discreta/contínua.

Variáveis qualitativas:

- Género - nominal
- Acesso à Internet - nominal
- Satisfação com o Acesso - ordinal

Variáveis quantitativas:

- Idade - contínua
- Salário - contínua
- Agregado familiar - discreta

Ciências ULisboa

Organização de dados (cont.)

Dados qualitativos nominais: podem ser agrupados numa tabela de frequências, onde cada categoria distinta que a variável pode assumir é listada junto com a contagem do número de ocorrências em cada categoria.

Tabela de frequências da variável qualitativa nominal "Género"

Género	**Número de pessoas (n_i)**	**% de pessoas (f_i)**
F	5	$5/12 \equiv 41.67\%$
M	7	$7/12 \equiv 58.33\%$
Total	12	$1 \equiv 100\%$

Tabela de frequências da variável qualitativa nominal "Acesso à Internet"

Acesso à Internet	**Número de pessoas (n_i)**	**% de pessoas (f_i)**
ADSL	7	$7/12 \equiv 58.33\%$
Fibra	3	$3/12 \equiv 25\%$
4G	2	$2/12 \equiv 16.67\%$
Total	12	$1 \equiv 100\%$

Ciências ULisboa

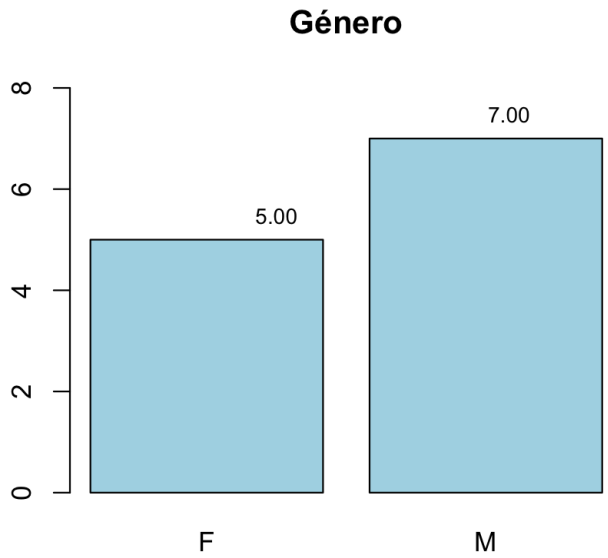
Organização de dados (cont.)

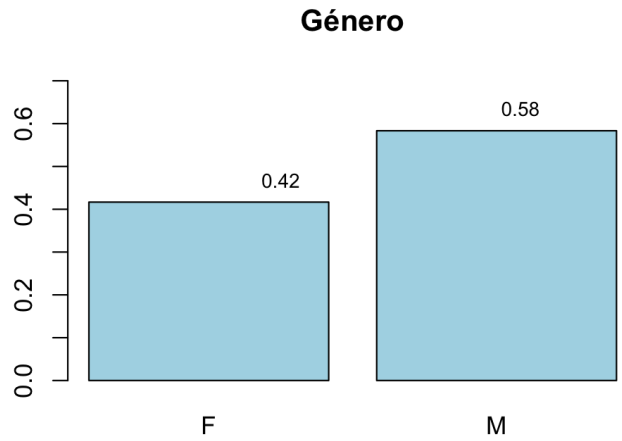
Dados qualitativos nominais: A representação gráfica pode ser feita com base num gráfico de barras ou num gráfico circular.

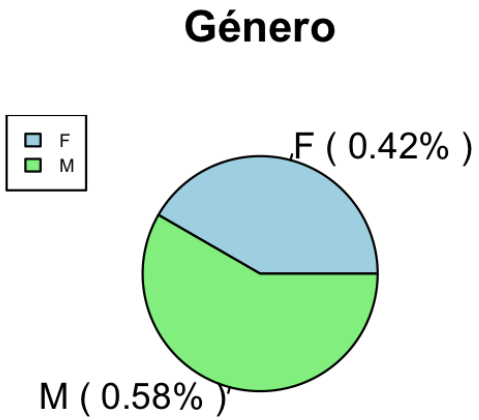
- Gráfico de barras: Conjunto de barras verticais ou horizontais. Cada barra representa uma categoria, e a altura da barra mostra a frequência absoluta ou relativa dessa categoria. A largura das barras não tem significado.
- Gráfico circular (ou gráfico de pizza): Exibe as proporções ou percentagens de diferentes categorias de dados em relação a um todo. Cada categoria é representada como uma "fatia" do círculo, e o tamanho de cada fatia é proporcional à sua contribuição para o total.

Ciências ULisboa

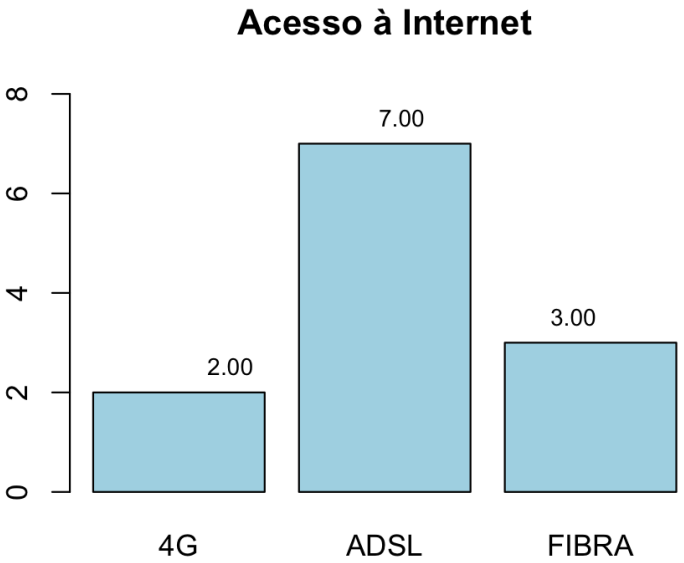
Organização de dados (cont.)

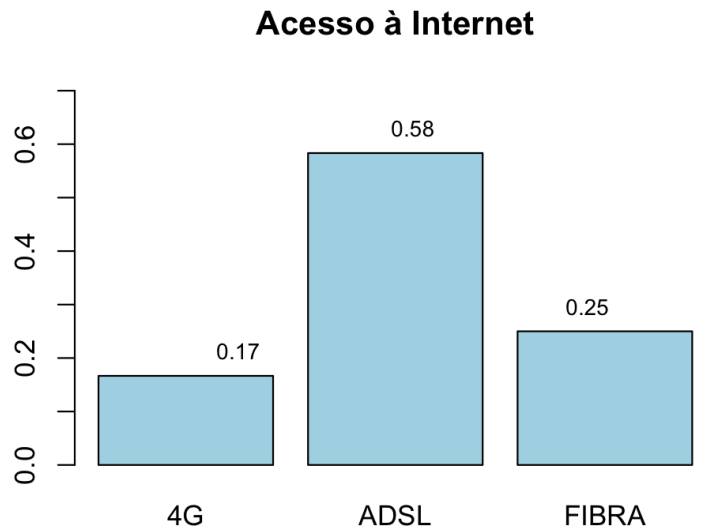


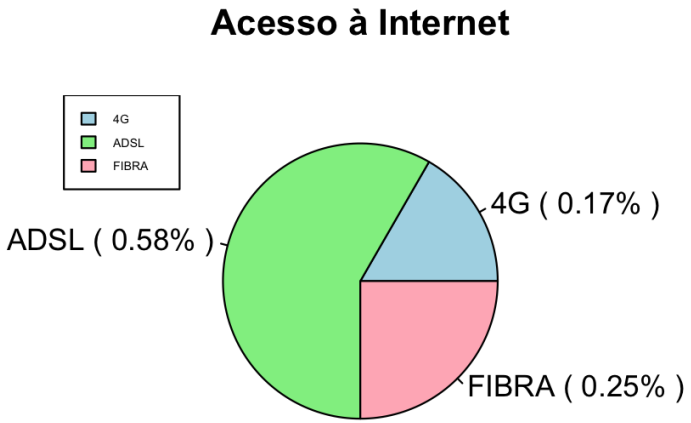




Organização de dados (cont.)







Organização de dados (cont.)

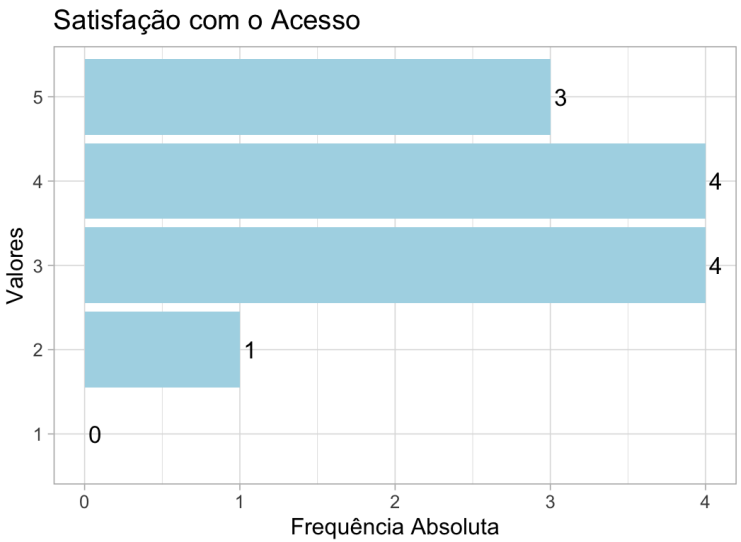
Dados qualitativos ordinais: podem ser agrupados numa tabela de frequências e sua representação gráfica pode ser feita com base num gráfico de barras ou gráfico circular.

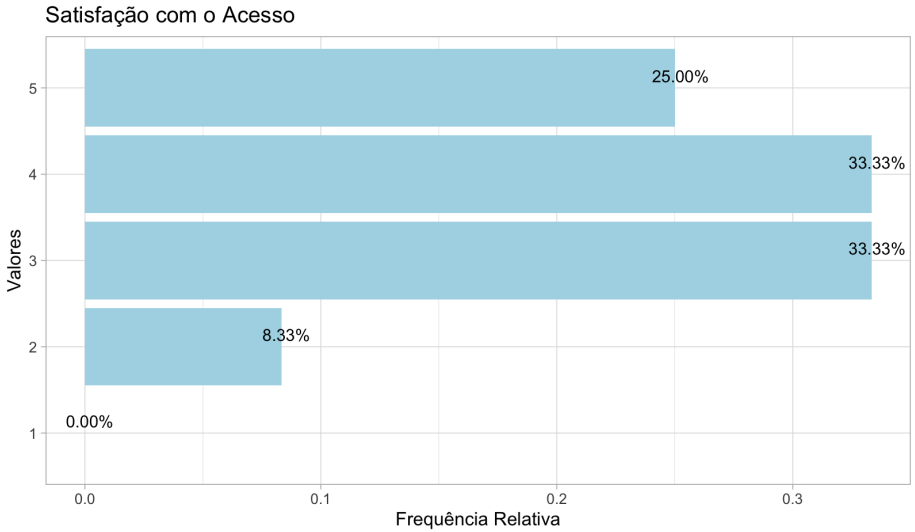
Tabela de frequências da variável qualitativa ordinal "Satisfação com o Acesso"

Valores (x_i)	Freq. Abs (n_i)	Freq. Rela (f_i)	Freq. Abs Acum (N_i)	Freq. Rela Acum (F_i)
1	0	0	0	0
2	1	0.0833	1	0.0833
3	4	0.3333	5	0.4167
4	4	0.3333	9	0.7500
5	3	0.2500	12	1
Total	12	1	-	-

Ciências ULisboa

Organização de dados (cont.)





Organização de dados (cont.)

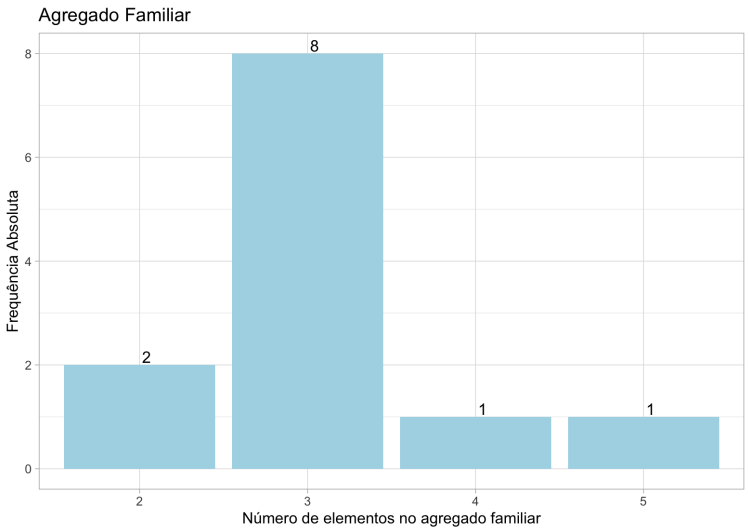
Dados quantitativos discretos: Quando a variável assume um número reduzido de valores observados, o tratamento desses dados, tanto no que diz respeito ao agrupamento como à representação gráfica, é semelhante ao tratamento dado a dados qualitativos ordinais.

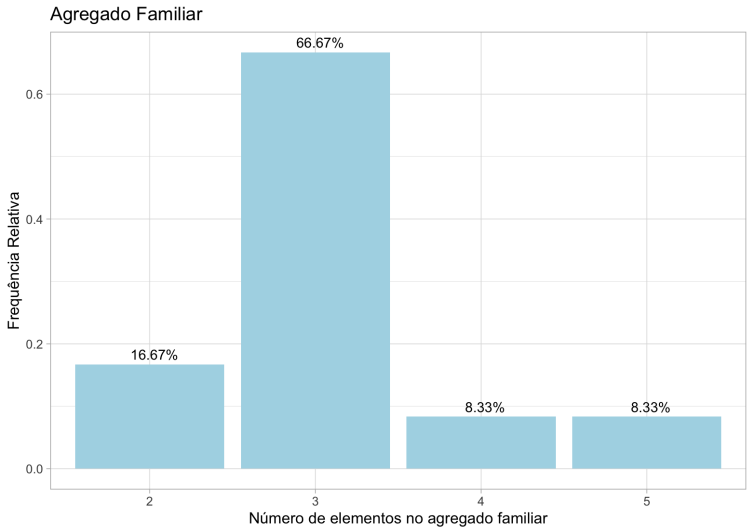
Tabela de frequências da variável quantitativa discreta "Agregado familiar"

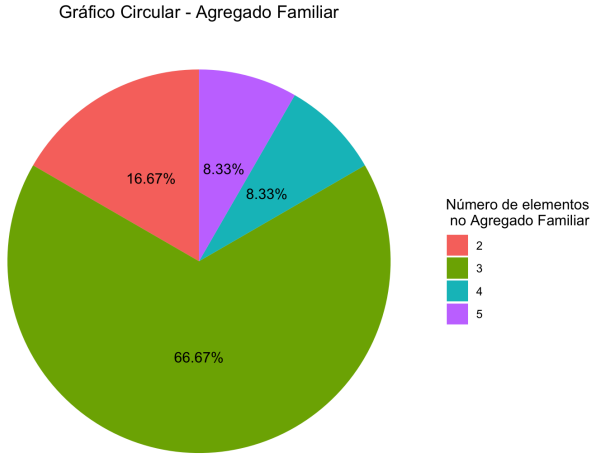
Agreg familiar (x_i)	Freq Abs (n_i)	Freq Rela (f_i)	Freq Abs Acum (N_i)	Freq Rela Acum (F_i)
2	2	0.1667	2	0.1667
3	8	0.6667	10	0.8334
4	1	0.0833	11	0.9167
5	1	0.0833	12	1
Total	12	1	-	-

Ciências ULisboa

Organização de dados (cont.)







Organização de dados (cont.)

Dados quantitativos contínuos: Quando a variável assume um número elevado de valores observados diferentes, os dados quantitativos devem ser classificados em classes ou intervalos. A representação gráfica é feita num histograma.

Agrupamento em classes:

1. Ordenar os valores amostrais: $x_i \rightarrow x_{(i)}$
2. Determinar a amplitude amostral: $A = \max(x_i) - \min(x_i)$
3. Definição do número de classes, k:
   - Fórmula de Sturges

$$k = \text{Int}[1 + 3.321928. \log_{10}(n)]$$

   - Menor inteiro k tal que $2^k \geq n$
   - Regra empírica

$$n \leq 25 \quad \text{vem} \quad k = 5$$
$$n > 25 \quad \text{vem} \quad k \simeq \sqrt{n}$$

Ciências ULisboa

Organização de dados (cont.)

4. Amplitude das classes: $h = \frac{A}{k}$ (valor arredondado por excesso)
5. Metodologia para a construção das classes:
   - Determinar $\varepsilon = kh - A$ e fazer $c_1 = x_{(1)} - \frac{\varepsilon}{2}$;
   - Classes

$$
\begin{aligned}
C_1 &=]c_1, c_1 + h] =]c_1, c_2] \\
C_2 &=]c_2, c_2 + h] =]c_2, c_3] \\
&\dots \\
C_k &=]c_k, c_k + h] =]c_k, c_{k+1}] \text{ onde } c_{k+1} = x_{(n)} + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}
$$

Organização de dados (cont.)

Dimensão da amostra: $n = 12$ pessoas

Valores observados (x_i): 19 20 21 26 30 37 20 18 25 22 20 33

Valores ordenados ($x_{(i)}$): 18 19 20 20 20 21 22 25 26 30 33 37

Amplitude amostral: $A = x_{(12)} - x_{(1)} = 37 - 18 = 19$

Número de classes: $\text{Int}[1 + 3.321928.\log_{10}(12)] = \text{Int}[4.585] = 4$

Amplitude das classes: $h = \frac{A}{k} = \frac{19}{4} = 4.75 \approx 5$ (valor arredondado por excesso)

$\varepsilon = kh - A = 4 \times 5 - 19 = 1;$

$c_1 = x_{(1)} - \frac{\varepsilon}{2} = 18 - \frac{1}{2} = 17.5$

$c_2 = c_1 + h = 17.5 + 5 = 22.5 \quad \rightarrow \quad C_1 =]17.5, 22.5]$

$c_3 = c_2 + h = 22.5 + 5 = 27.5 \quad \rightarrow \quad C_2 =]22.5, 27.5]$

$c_4 = c_3 + h = 27.5 + 5 = 32.5 \quad \rightarrow \quad C_3 =]27.5, 32.5]$

$c_5 = c_4 + h = 32.5 + 5 = 37.5 \quad \rightarrow \quad C_4 =]32.5, 37.5]$

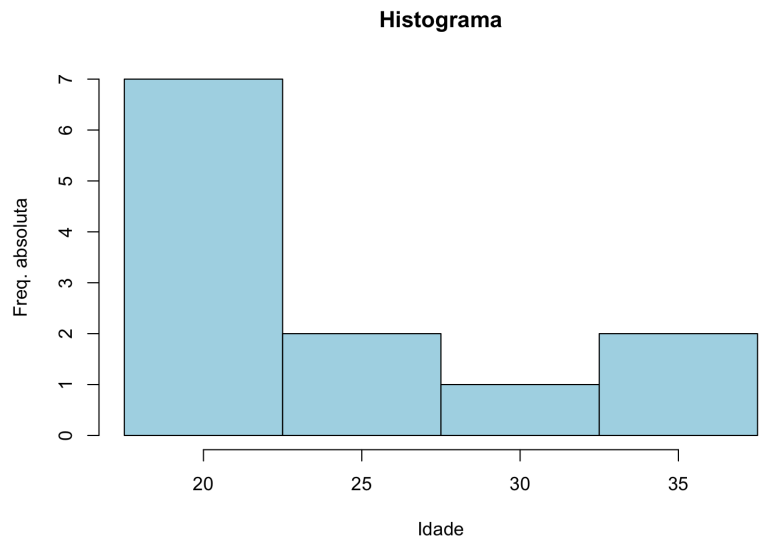
Ciências ULisboa

Organização de dados (cont.)

Tabela de frequências da variável "Idade"

Faixa etária $]c_i, c_{i+1}]$	Freq Absoluta (n_i)	Freq Relativa (f_i)	Freq Absoluta Acum (N_i)	Freq Relativa Acum (F_i)	Ponto médio $x_i^* = \frac{c_i + c_{i+1}}{2}$
$]17.5, 22.5]$	7	$7/12 \approx 58.33\%$	7	$7/12 \approx 58.33\%$	20
$]22.5, 27.5]$	2	$2/12 \approx 16.67\%$	9	$9/12 \approx 75\%$	25
$]27.5, 32.5]$	1	$1/12 \approx 8.33\%$	10	$10/12 \approx 83.33\%$	30
$]32.5, 37.5]$	2	$2/12 \approx 16.67\%$	12	$1 \approx 100\%$	35
Total	12	$1 \approx 100\%$	-	-	-

- A representação gráfica é feita num histograma. Histograma é uma representação gráfica dos dados em que se marcam as classes (intervalos) no eixo horizontal e as frequências (absoluta ou relativa) no eixo vertical.
- Cada retângulo corresponde a uma classe.
- A largura de cada retângulo é igual à amplitude da classe.
- Se as classes tiverem todas a mesma amplitude, a altura do retângulo é proporcional à frequência.



Ciências ULisboa

3. Medidas Descritivas

Variáveis Quantitativas - Indicadores amostrais

Uma forma de resumir a informação contida nos dados é através da obtenção de medidas específicas chamadas estatísticas, que são calculadas diretamente a partir dos dados. Estas estatísticas fornecem uma descrição quantitativa das características principais dos dados e podem incluir:

- Medidas de localização: localizam o centro da amostra.
- Medidas de dispersão: medem a variabilidade dos dados.
- Medidas de assimetria: determinam o tipo de assimetria dos dados.
- Medidas de achatamento: indicam o tipo de achatamento dos dados.

Ciências ULisboa

Variáveis Quantitativas - Indicadores amostrais (cont.)

- **Medidas de localização**
  - Medidas de tendência central: média, moda, mediana
  - Medidas de tendência não central: quantis
- **Medidas de dispersão**
  - Medidas de dispersão absoluta: amplitude total, variância/desvio padrão, amplitude inter-quartis
  - Medidas de dispersão relativa: coeficiente de variação
- **Medidas de assimetria**
  - coeficiente de assimetria
- **Medidas de achatamento**
  - coeficiente de achatamento

Ciências ULisboa

Medidas de localização

Seja $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ uma amostra de dimensão n, n_i a frequência absoluta, f_i a frequência relativa e x_i^* o ponto médio da classe.

Média (dados não agrupados)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots x_n}{n}.$$

Média (dados agrupados)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i.$$

Média (dados agrupados em classes)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^* n_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} x_i^* f_i$$

Medidas de localização (cont.)

Exemplo (média dados não agrupados): Calcule a idade média das pessoas.

$x =$ "idade da pessoa"

Valores observados (x_i): 19 20 21 26 30 37 20 18 25 22 20 33

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i}{12} = \frac{19+20+21+26+30+37+20+18+25+22+20+33}{12} = 24.25$$

A idade média amostral é de 24.25 anos.

Média no R

```
# Criar um vetor com os valores da variável
x <- c(19,20,21,26,30,37,20,18,25,22,20,33)
# Calculando a média de x
media <- mean(x)
print(media)
[1] 24.25
```

Medidas de localização (cont.)

Exemplo (média dados agrupados)

Agreg familiar (x_i)	Freq Abs (n_i)	Freq Rela (f_i)
2	2	0.1667
3	8	0.6667
4	1	0.0833
5	1	0.0833
Total	12	1

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} n_i x_i}{12}$$
$$= \frac{2 \times 2 + 8 \times 3 + 1 \times 4 + 1 \times 5}{12}$$
$$= 3.083$$

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} f_i x_i$$
$$= 0.1667 \times 2 + 0.6667 \times 3 + 0.0833 \times 4$$
$$+ 0.0833 \times 5$$
$$= 3.083$$

Ciências ULisboa

Medidas de localização (cont.)

Exemplo (média dados agrupados em classes)

Faixa etária $]c_i, c_{i+1}]$	Freq Absoluta (n_i)	Freq Relativa (f_i)	Ponto médio $x_i^* = \frac{c_i + c_{i+1}}{2}$
$]17.5, 22.5]$	7	$7/12 \approx 58.33\%$	20
$]22.5, 27.5]$	2	$2/12 \approx 16.67\%$	25
$]27.5, 32.5]$	1	$1/12 \approx 8.33\%$	30
$]32.5, 37.5]$	2	$2/12 \approx 16.67\%$	35
Total	12	$1 \approx 100\%$	-

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^*}{12} = \frac{7\times 20 + 2\times 25 + 1\times 30 + 2\times 35}{12} = 24.17$$

Medidas de localização (cont.)

Moda

É o valor que ocorre com maior frequência.

- É a única medida descritiva utilizada para dados qualitativos nominais.
- Uma amostra pode possuir mais do que uma ou não ter moda.

Ciências ULisboa

Medidas de localização (cont.)

Exemplo: Calcule a moda do conjunto de dados {7, 9, 7, 5, 9, 8, 7}.

Vamos ordenar para ajudar na visualização.

$$\{5, 7, 7, 7, 8, 9, 9\}$$

Portanto, a moda é 7. O conjunto de dados é unimodal.

Exemplo: Calcule a moda do conjunto de dados {7, 7, 9, 6, 9, 7, 4, 9, 9, 7, 1, 2}.

Vamos ordenar para ajudar na visualização.

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9\}$$

Portanto, a moda é 7 e 9. O conjunto de dados é bimodal.

Ciências ULisboa

Medidas de localização (cont.)

Mediana

É o valor da variável que divide os dados ordenados em duas partes de igual frequência, ou seja, 50% das observações são menores ou iguais à mediana e 50% são maiores ou iguais à mediana.

$$me = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{para } n \text{ ímpar} \\ \dfrac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

Ciências ULisboa

Medidas de localização (cont.)

Exemplo: Calcule a mediana das observações (12, 4, 1, 3, 2, 1, 7).

- Tamanho do conjunto: $n = 7$
- Dados ordenados: (1,1,2,3,4,7,12)
- Como $n = 7$ é ímpar, temos $\frac{n+1}{2} = \frac{8}{2} = 4$. Portanto,

$$me = x_{(4)} = 3.$$

Exemplo: Calcule a mediana das observações: (1, 1, 2, 1, 3, 5, 4, 2).

- Tamanho do conjunto: $n = 8$
- Dados ordenados: (1,1,1,2,2,3,4,5)
- Como $n = 8$ é par, temos $\frac{n}{2} = \frac{8}{2} = 4$ e $\frac{n}{2} + 1 = 5$. Portanto,

$$me = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2.$$

Mediana no R

```
> x <- c(12,4,1,3,2,1,7)
> median(x)
[1] 3
```

Medidas de localização (cont.)

Quantil de ordem α (Q_α, $0 < \alpha < 1$)

Chama-se **quantil de ordem** α ($0 < \alpha < 1$), o valor Q_α tal que

- pelo menos $\alpha \times 100\%$ das observações ordenadas são $\leq Q_\alpha$
- pelo menos $(1 - \alpha) \times 100\%$ das observações ordenadas são $\geq Q_\alpha$.

Mais precisamente,

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow (x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(n)})$$

$$Q_\alpha = \begin{cases} \frac{x_{(n\alpha)} + x_{(n\alpha+1)}}{2}, & \text{se } n\alpha \text{ é inteiro} \\ x_{(\lfloor n\alpha \rfloor + 1)}, & \text{se } n\alpha \text{ é não inteiro.} \end{cases}$$

$\lfloor * \rfloor$ – parte inteira do número.

Medidas de localização (cont.)

Quartis

São valores numéricos que dividem o conjunto ordenado das observações em quatro partes iguais.

- $Q_{1/4}$ é o 1° quartil
- $Q_{2/4}$ é o 2° quartil (mediana)
- $Q_{3/4}$ é o 3° quartil

- Os **decis** correspondem aos quantis de ordem $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}$.
- Os **percentis** correspondem aos quantis de ordem $\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \ldots, \frac{99}{100}$.

Ciências ULisboa

Medidas de localização (cont.)

Exemplo: Calcule o 1° quartil das observações (12, 4, 1, 3, 2, 1, 7).

- Tamanho do conjunto: $n = 7$
- Dados ordenados: (1, 1, 2, 3, 4, 7, 12)
- Como $n\alpha = 7 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$ é não inteiro, temos

$$Q_{1/4} = x_{(\lfloor 1.75 \rfloor + 1)} = x_{(2)} = 1$$

Exemplo: Calcule o 3° quartil das observações acima.

- Tamanho do conjunto: $n = 7$
- Dados ordenados: (1, 1, 2, 3, 4, 7, 12)
- Como $n\alpha = 7 \times \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5.25$ é não inteiro, temos

$$Q_{3/4} = x_{(\lfloor 5.25 \rfloor + 1)} = x_{(6)} = 7$$

Ciências ULisboa

Medidas de localização (cont.)

Quantis no R

```
# Criar vetor com os valores da variável
x <- c(12, 4, 1, 3, 2, 1, 7)
# Calcular quantis
quantis <- quantile(x, type=2)
print(quantis)
 0% 25% 50% 75% 100%
  1   1   3   7   12

# Somente o primeiro quartil
quantile(x, probs=0.25, type=2)
25%
  1
```

Medidas de dispersão

Amplitude (R)

Diferença entre o valor máximo e o valor mínimo da amostra

$$R = \max(x_i) - \min(x_i) = x_{(n)} - x_{(1)}$$

Amplitude inter-quartis (IQR)

Diferença entre o terceiro e o primeiro quartil

$$IQR = Q_{3/4} - Q_{1/4}$$

Ciências ULisboa

Medidas de dispersão (cont.)

Variância (dados não agrupados)

Média dos quadrados dos desvios em relação à média

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

Variância (dados agrupados)

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - n\bar{x}^2\right)$$

Variância (dados agrupados em classes)

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i^* - \bar{x})^2 n_i}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k}(x_i^*)^2 n_i - n\bar{x}^2\right)$$

Medidas de dispersão (cont.)

Desvio padrão

$$s = +\sqrt{s^2}$$

Está na mesma unidade de medida da média.

Coeficiente de variação

É a proporção da média representada pelo desvio padrão.

$$cv = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\%$$

- Se $cv \leq 15\%$, os dados apresentam uma variabilidade fraca;
- Se $15\% < cv < 30\%$, os dados apresentam uma variabilidade média;
- Se $cv \geq 30\%$, os dados apresentam uma variabilidade elevada.

Ciências ULisboa

Medidas de dispersão (cont.)

Exemplo: Consideremos que x_{1i} e x_{2i} são conjuntos de valores referentes aos salários (\$) de mulheres de homens, para os quais foram obtidas as seguintes medidas:

Mulheres (X_1):

$$\bar{x}_1 = 1300$$
$$s_1 = 340$$

Homens(X_2):

$$\bar{x}_2 = 2500$$
$$s_2 = 420$$

Qual grupo varia mais em relação aos salários?

$$\bar{x}_1 = 1300$$
$$s_1 = 340$$
$$cv_1 = 26.2\%$$

$$\bar{x}_2 = 2500$$
$$s_2 = 420$$
$$cv_2 = 16.8\%$$

- O maior desvio padrão, quando comparado à sua média, representou menor variação.

Ciências ULisboa

Medidas de dispersão no R

Amplitude no R

```
# Criar um vetor com os valores da variável
x <- c(12, 4, 1, 3, 2, 1, 7)
# Calcular a amplitude
amplitude <- max(x)-min(x)
print(amplitude)
[1] 11
```

Amplitude inter-quartis no R

```
# Calcular a amplitude inter-quartis
ampli_iqr <- IQR(x, type=2)
print(ampli_iqr)
[1] 6
```

Ciências ULisboa

Medidas de dispersão no R (cont.)

Variância no R

```
# Criar vetor com os valores da variável
x <- c(12, 4, 1, 3, 2, 1, 7)
# Calculando a variância
variancia <- var(x)
print(variancia)
[1] 15.90476
```

Desvio padrão no R

```
# Calculando o desvio padrão
desvio_padrao <- sd(x)
print(desvio_padrao)
[1] 3.988077
```

Coeficiente de variação no R

```
# Calculando o coeficiente de variação
coef_variacao <- sd(x)/mean(x)
print(coef_variacao)
[1] 0.9305514
```

Outliers

Outlier

Outliers são pontos de dados que diferem significativamente da maioria dos dados em um conjunto de dados. Eles são valores extremos que podem indicar uma variabilidade significativa, um erro de medição ou um fenómeno diferente do restante do conjunto de dados. Em análise estatística, os outliers podem distorcer a interpretação dos dados, afetando médias e variâncias, e, por isso, é importante identificá-los e decidir como tratá-los.

Uma observação x_i é classificada como **outlier moderado** se

$$x_i \notin [Q_{1/4} - 1.5 \times IQR, Q_{3/4} + 1.5 \times IQR]$$

ou como **outlier severo** se

$$x_i \notin [Q_{1/4} - 3 \times IQR, Q_{3/4} + 3 \times IQR]$$

Ciências ULisboa

Outliers (cont.)

Ou seja, um outlier será **moderado** se

$$Q_{3/4} + 1.5 \times IQR < x_i \leq Q_{3/4} + 3 \times IQR$$

ou

$$Q_{3/4} - 3 \times IQR \leq x_i < Q_{1/4} - 1.5 \times IQR$$

e será **severo** se

$$x_i > Q_{3/4} + 3 \times IQR$$

ou

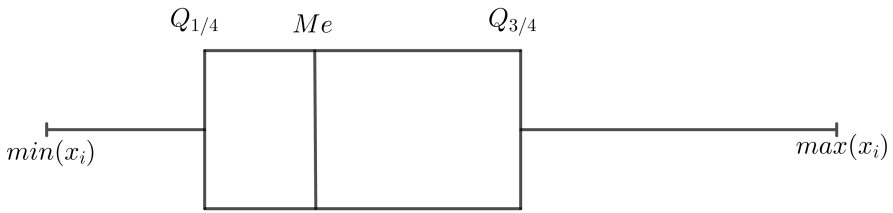
$$x_i < Q_{1/4} - 3 \times IQR$$

Ciências ULisboa

Outliers e Caixa de bigodes

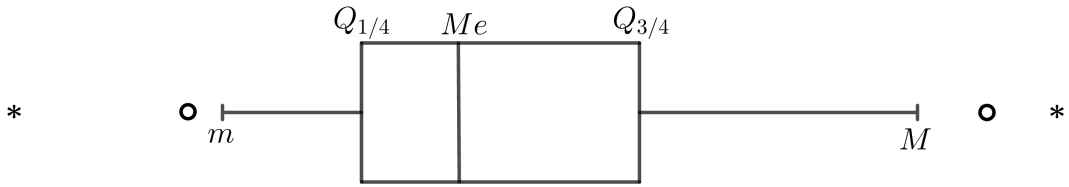
Diagrama de Extremos e Quartis (Caixa de Bigodes ou Boxplot) é uma ferramenta gráfica usada para resumir e visualizar a distribuição de um conjunto de dados. Ele fornece uma maneira rápida de visualizar a mediana, quartis, valores mínimos e máximos, e possíveis outliers.

Boxplot sem outliers



Outliers e Caixa de bigodes (cont.)

Boxplot com outliers



- $m-$ menor dos valores das observações que não é um outlier;
- $M-$ maior dos valores das observações que não é um outlier;
- $\circ-$ outlier moderado;
- $*-$ outlier severo.

Outliers e Caixa de bigodes (cont.)

Exemplo: Num teste registaram-se as seguintes classificações

$$5 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \quad 3 \quad 5 \quad 10 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 18 \quad 1 \quad 6$$

Verifique a existência de outliers na amostra acima.

Resolução:

Dimensão da amostra: $n = 15$

Amostra ordenada:

$$1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 5 \quad 6 \quad 10 \quad 18$$

Mediana: $me = x_{(\lfloor n/2 \rfloor + 1)} = x_{(\lfloor 7.5 \rfloor + 1)} = x_{(8)} = 4$

Primeiro Quartil: $Q_{1/4} = x_{(\lfloor n/4 \rfloor + 1)} = x_{(\lfloor 3.75 \rfloor + 1)} = x_{(4)} = 2$

Terceiro quartil: $Q_{3/4} = x_{(\lfloor 3n/4 \rfloor + 1)} = x_{(\lfloor 11.25 \rfloor + 1)} = x_{(12)} = 5$

Intervalo inter-quartis: $IQR = Q_{3/4} - Q_{1/4} = 5 - 2 = 3$

Ciências ULisboa

Outliers e Caixa de bigodes (cont.)

Outlier moderado

$x_i \notin [Q_{1/4} - 1.5 \times IQR, Q_{3/4} + 1.5 \times IQR] = [2 - 1.5 \times 3, 5 - 1.5 \times 3] = [-2.5, 9.5]$

Como $x_{(14)}, x_{(15)} \notin [2.5, 9.5]$, então $x_{(14)} = 10$ e $x_{(15)} = 18$ são a princípio outliers moderados.

Outliers severos

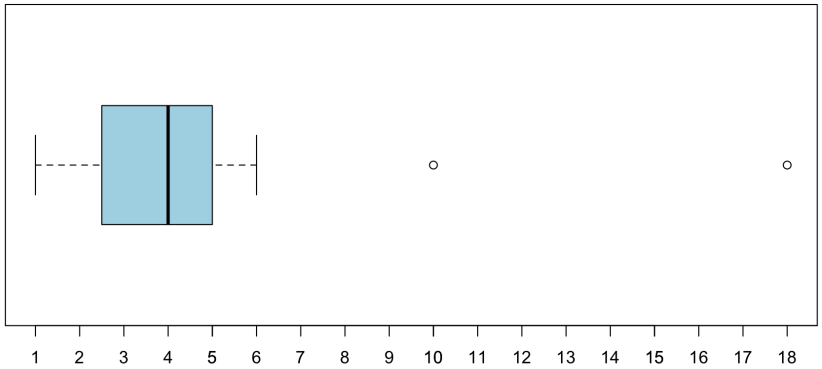
$x_i \notin [Q_{1/4} - 3 \times IQR, Q_{3/4} + 3 \times IQR] = [2 - 3 \times 3, 5 + 3 \times 3] = [-7, 14]$

Como $x_{(15)} = 18 \notin [-7, 14]$ então $x_{(15)}$ é um outlier severo.

Portanto, temos dois outliers, 10 moderado e 18 severo.

Ciências ULisboa

Outliers e Caixa de bigodes (cont.)



No R

```
x <- c(1,1,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,6,10,18)
boxplot(x, col="lightblue", horizontal = T)
axis(1, at=1:20, labels = 1:20)
```

Ciências ULisboa

4. Análise Bivariada

Análise bivariada

A **análise bivariada** é o estudo da relação entre duas variáveis quantitativas.

- Em Física, um exemplo clássico é a relação entre a **temperatura** e a **resistência elétrica** de um material condutor.
- Na Engenharia Biomédica, a análise bivariada pode ser utilizada para estudar como a **frequência cardíaca** varia com o **esforço físico**, ou como a **concentração de um fármaco no sangue** influencia a **pressão arterial** de um paciente ao longo do tempo.

Ciências ULisboa

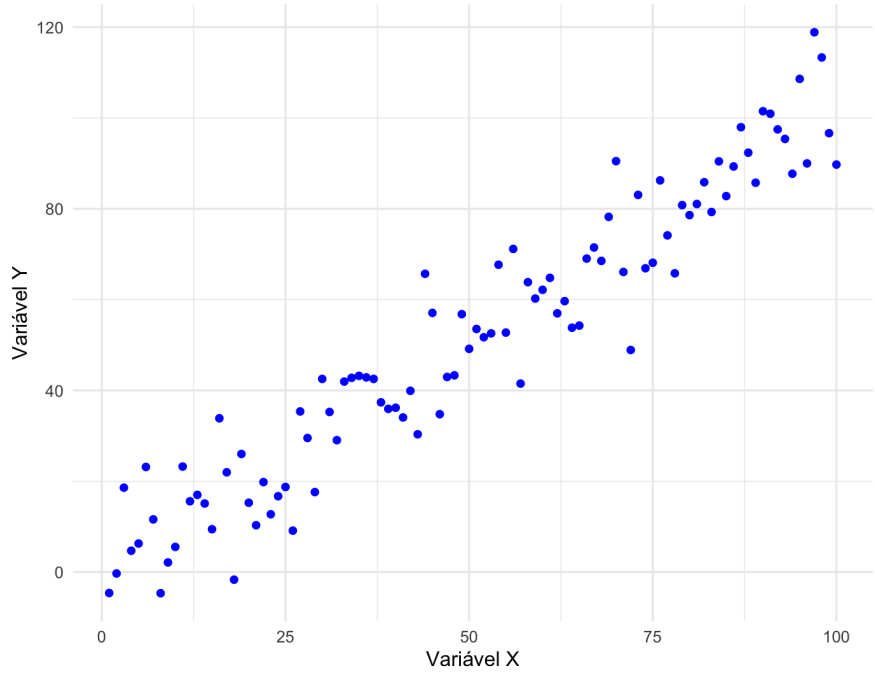
Análise bivariada (cont.)

Análise da associação entre duas variáveis

1. Começa pela recolha de uma amostra bivariada, ou seja, n pares de observações

$$(x_1, y_1); \quad (x_2, y_2); \quad \ldots \quad ; (x_n, y_n)$$

2. Representação gráfica usando um diagrama de dispersão. Gráfico que mostra a relação entre duas variáveis. Cada ponto no gráfico representa uma observação.



Análise bivariada (cont.)

3. Verificar se a relação entre X e Y é linear. Isso é traduzido em verificar se parece existir ou não correlação entre as variáveis e em caso afirmativo, se essa correlação é:

   - positiva ou negativa;
   - forte ou fraca;
   - tipo de correlação.

4. Se este for o caso, poderemos estudar a relação linear entre as duas variáveis usando um modelo de regressão linear simples, cuja equação é dada por

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$$

   - $Y-$ variável explicada ou dependente;
   - $X-$ variável explicativa ou independente;
   - $\epsilon-$ variável de tipo residual que inclui outros fatores explicativos de Y não incluídos em X e possíveis erros de medição;
   - β_0 e β_1 são os parâmetros da reta a ajustar (constantes);
   - β_0 é a intersecção da reta com o eixo vertical;
   - β_1 é o declive da reta.

Análise bivariada (cont.)

Covariância

A **covariância** entre duas variáveis x e y é uma medida da associação linear entre as duas variáveis:

$$cov[x, y] = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1}$$

O valor da covariância depende das unidades de medida utilizadas.

Análise da covariância

- Se $cov[x, y] > 0$, existe uma associação linear positiva, isto é, ambas as variáveis tendem a variar no mesmo sentido;
- Se $cov[x, y] < 0$, existe uma associação linear negativa, isto é, as variáveis tendem a variar em sentidos opostos;
- Se $cov[x, y] = 0$, não existe associação linear entre as variáveis.

A informação contida na covariância é principalmente sobre o sinal da associação entre x e y e não sobre a intensidade.

Análise bivariada (cont.)

Coeficiente de correlação linear amostral

$$r = \frac{cov[x, y]}{s_x s_y}, \quad \text{com} \quad -1 \leq r \leq 1.$$

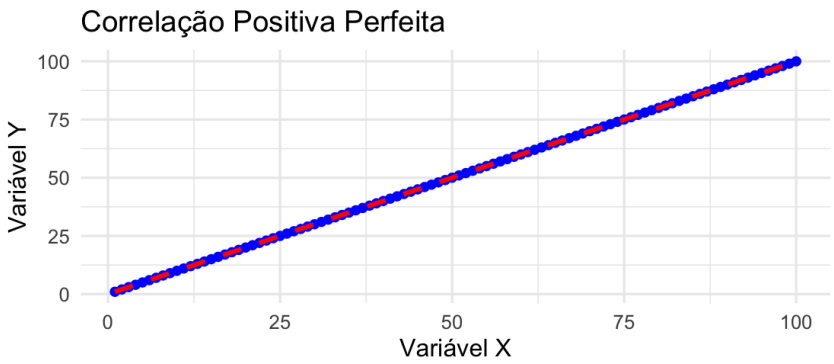
- Permite averiguar o grau de associação linear entre as duas variáveis.
- O seu valor não depende das unidades de medida que as variáveis estão expressas.

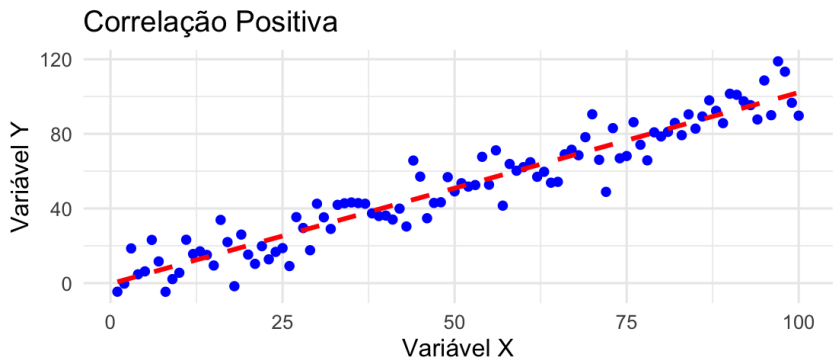
Análise do coeficiente de correlação

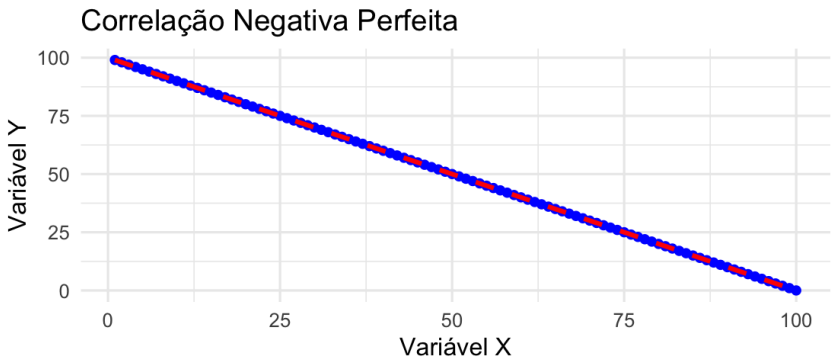
- $r = -1 \Rightarrow$ existe uma correlação linear negativa perfeita entre x e y;
- $r = 1 \Rightarrow$ existe uma correlação linear positiva perfeita entre x e y;
- $r = 0 \Rightarrow$ não existe correlação linear entre x e y;
- $-1 < r < 0 \Rightarrow$ existe uma correlação linear negativa entre x e y (menos forte do que quando $r = -1$);
- $0 < r < 1 \Rightarrow$ existe uma correlação linear positiva entre x e y (menos forte de que quando $r = 1$).

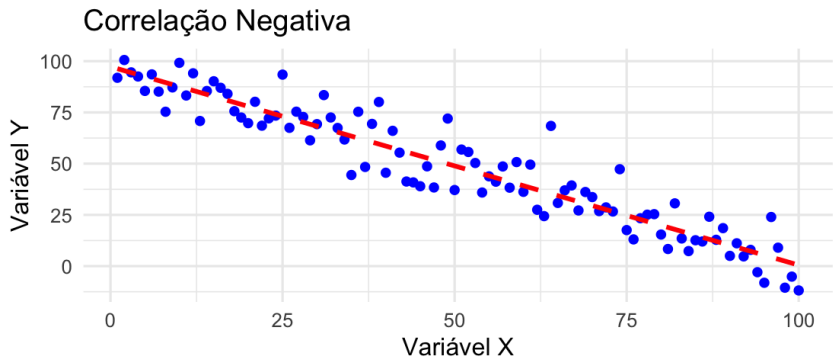
Ciências ULisboa

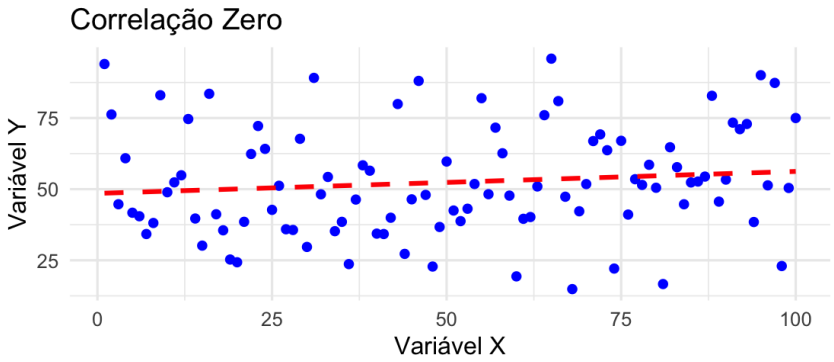
Análise bivariada (cont.)











Ciências ULisboa

Análise bivariada (cont.)

Exemplo: Investigadores em Física e Engenharia Biomédica estão interessados em estudar a relação entre a **viscosidade do sangue** e a **concentração de glóbulos vermelhos (hematócrito)**.

- A viscosidade do sangue é uma medida da sua resistência ao escoamento e desempenha um papel fundamental na circulação sanguínea.
- O hematócrito, por sua vez, representa a fração do volume sanguíneo ocupada por glóbulos vermelhos. Um aumento no hematócrito pode afetar a viscosidade do sangue e, consequentemente, a eficiência do transporte de oxigénio e a pressão arterial.

Compreender essa relação é essencial para o desenvolvimento de modelos biomédicos da circulação sanguínea, para o estudo de doenças cardiovasculares e para a otimização de tratamentos médicos, como a administração de fluidos intravenosos.

Ciências ULisboa

Análise bivariada (cont.)

Os dados a seguir representam a **concentração de glóbulos vermelhos (%)** e a **viscosidade do sangue (mPa·s)** de diferentes amostras coletadas de pacientes. Com base nesses dados, calcule a covariância e o coeficiente de correlação entre o hematócrito e a viscosidade sanguínea.

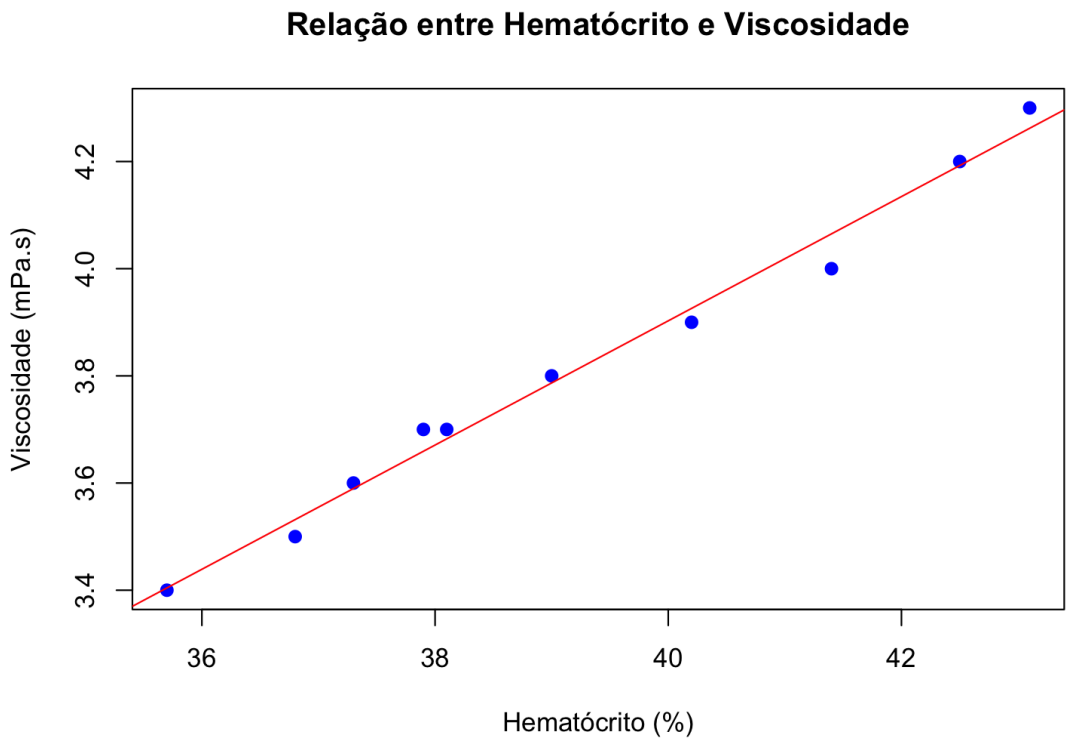
Amostra	Hematócrito (%)	Viscosidade (mPa·s)
1	40.2	3.9
2	36.8	3.5
3	42.5	4.2
4	38.1	3.7
5	37.3	3.6
6	39.0	3.8
7	41.4	4.0
8	35.7	3.4
9	43.1	4.3
10	37.9	3.7

Ciências ULisboa

Análise bivariada (cont.)

Covariância entre hematócrito e viscosidade sanguínea = 0.7277778

Coeficiente de Correlação entre hematócrito e viscosidade sanguínea = 0.9936968



Análise bivariada no R

```
# Dados
hema <- c(40.2, 36.8, 42.5, 38.1, 37.3, 39, 41.4, 35.7, 43.1, 37.9)
visco <- c(3.9, 3.5, 4.2, 3.7, 3.6, 3.8, 4, 3.4, 4.3, 3.7)

# Calcular a covariância
covariancia <- cov(hema, visco)
correlacao <- cor(hema, visco)

# Exibir resultados
print(paste("Covariância entre Hematócrito e Viscosidade:", covariancia))
print(paste("Coeficiente de Correlação entre Hematócrito e Viscosidade:",
correlacao))

# Gráfico de dispersão
plot(hema, visco, main = "Relação entre Hematócrito e Viscosidade", xlab =
     pch = 19, col = "blue")

# Adicionar linha de tendência
abline(lm(visco ~ hema), col = "red")
```

Ciências ULisboa

Referências

- Manuel Cabral Morais (2020): Probabilidade e Estatística: Teoria, Exemplos & Exercícios. IST Press, 1a edição.

Ciências ULisboa