Estimação por intervalos de confiança

Introdução às Probabilidades e Estatística

Sumário

1. Distribuições Amostrais

Distribuição amostral

Distribuição amostral

A distribuição de probabilidades de uma estatística $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $F_{T(X_1, X_2, \ldots, X_n)}(x)$, designa-se por distribuição amostral.

Uma distribuição amostral depende:

- Da distribuição da população;
- Do tamanho da amostra;
- Do conhecimento ou não da variância populacional (no caso da média amostral).

Distribuições amostrais:

- Distribuição normal reduzida;
- Distribuição t-Student;
- Distribuição Qui-quadrado;
- Distribuição F-Snedecor.

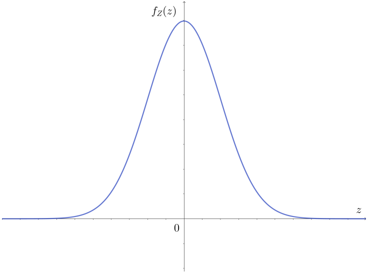
Ciências ULisboa

Distribuição normal reduzida

- É uma variável aleatória Z com distribuição normal com valor médio $\mu = E(Z) = 0$ e desvio padrão $\sigma = \sqrt{V(X)} = 1$ e escreve-se:

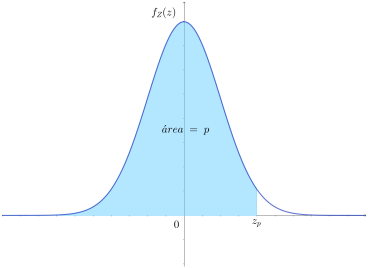
$$Z \sim N(0, 1);$$

- A distribuição normal reduzida é simétrica em relação à reta $x = \mu = 0$:



Distribuição normal reduzida (cont.)

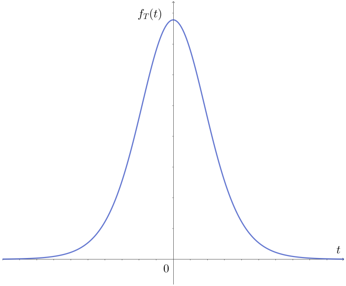
- A expressão
$$z_p = \Phi^{-1}(p)$$
representa o valor da variável aleatória Z para o qual a probabilidade acumulada é p.



- Devido à simetria da função densidade tem-se:
$$\Phi^{-1}(p) = -\Phi^{-1}(1-p).$$

Distribuição t-Student

- Se a variável aleatória T segue uma distribuição t-Student com n graus de liberdade, escreve-se:
$$T \sim t_n \quad \text{ou} \quad T \sim t_{(n)}$$
- A distribuição t-Student é simétrica em relação à reta $x = \mu = 0$.



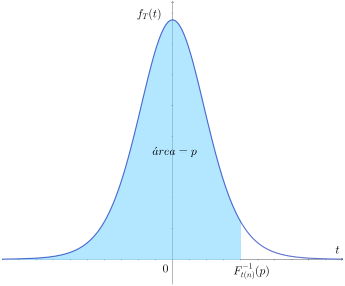
- $E(T) = 0$, se $n > 1$ e $V(T) = \frac{n}{n-2}$, se $n > 2$.

Distribuição t-Student (cont.)

- A expressão

$$F_{t_{(n)}}^{-1}(p)$$

representa o valor da variável aleatória T para o qual a probabilidade acumulada é p:



- Devido à simetria da função densidade tem-se:

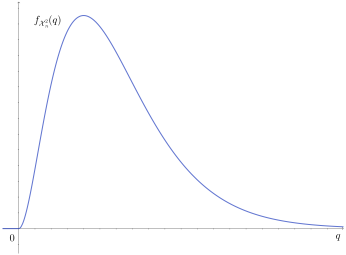
$$F_{t_{(n)}}^{-1}(p) = -F_{t_{(n)}}^{-1}(1-p)$$

Distribuição Qui-quadrado

- Se a variável aleatória X segue uma distribuição do qui-quadrado, com n graus de liberdade escreve-se:

$$X \sim \mathcal{X}_n^2 \quad \text{ou} \quad X \sim \mathcal{X}_{(n)}^2$$

- A distribuição qui-quadrado é assimétrica positiva:



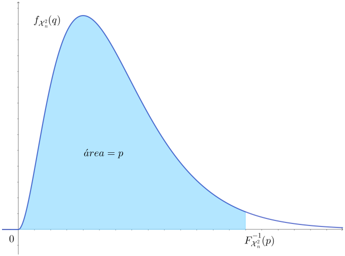
- $E(X) = n$ e $V(X) = 2n$

Distribuição Qui-quadrado (cont.)

- A expressão

$$F^{-1}_{\mathcal{X}^2_{(n)}}(p)$$

representa o valor da variável aleatória X para o qual a probabilidade acumulada é p:

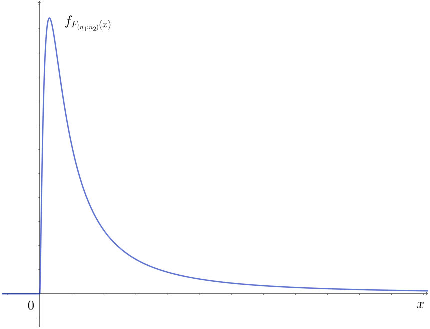


Distribuição F-Snedecor

- Se a variável aleatória X segue uma distribuição F-Snedecor com n_1 e n_2 graus de liberdade escreve-se:

$$X \sim F_{n_1;n_2} \quad \text{ou} \quad X \sim F_{(n_1;n_2)}$$

- A distribuição F-Snedecor é assimétrica positiva:



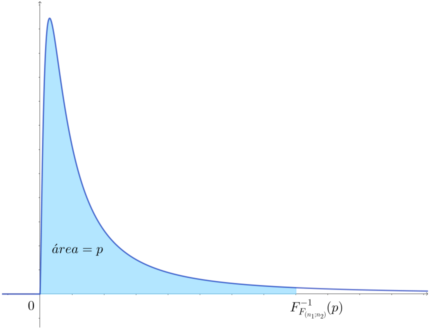
- $E(X) = \frac{n_2}{n_2-2}$, se $n_2 > 2$ e $V(X) = \frac{2n_2^2(n_1+n_2-2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$, se $n_2 > 4$.

Distribuição F-Snedecor (cont.)

- A expressão

$$F^{-1}_{F_{(n_1;n_2)}}(p)$$

representa o valor da variável aleatória X para o qual a probabilidade acumulada é p:



- Note-se que

$$F^{-1}_{F_{(n_1;n_2)}}(p) = \frac{1}{F^{-1}_{F_{(n_2;n_1)}}(1-p)}$$

Estimação intervalar

Nosso objetivo agora é construir intervalos de confiança que, com uma determinada probabilidade, contenham o verdadeiro valor do parâmetro populacional θ. Estes intervalos fornecem uma estimativa do intervalo provável para o parâmetro, com base nos dados da amostra, oferecendo uma margem de incerteza controlada.

Estimação intervalar (cont.)

Intervalo Aleatório de Confiança (IAC)

Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população X com função de probabilidade $f(x;\theta)$, com θ parâmetro desconhecido. Sejam $T_1 = T_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e $T_2 = T_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ duas estatísticas, tal que $T_1 < T_2$. Um **intervalo aleatório de confiança** $1-\alpha$ para θ é um intervalo $[T_1,\, T_2]$ tal que

$$P(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1-\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \text{ onde}$$

- $1-\alpha$ é o nível de confiança.
- α é o nível de significância.

Intervalo de confiança (IC)

Dada uma amostra particular $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a concretização do intervalo aleatório de confiança para θ com nível de confiança $(1-\alpha)\times 100\%$ é denominado por **intervalo de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para θ** e é dado por

$$[t_1 = T_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), t_2 = T_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

Estimação intervalar (cont.)

Interpretação do nível de confiança

- O nível de confiança é a probabilidade $1-\alpha$ (normalmente expressa como valor percentual equivalente) do intervalo aleatório de confiança conter o valor do parâmetro populacional θ;
- O nível de significância α ($\alpha \in]0,1[$) é a probabilidade do intervalo aleatório de confiança não conter o valor do parâmetro populacional θ;
- Para o intervalo de confiança, o nível de confiança indica a proporção de vezes que os intervalos observados, $[t_1, t_2]$, contêm o parâmetro θ;
- Interpretação do intervalo de confiança determinista: Se selecionássemos 100 amostras diferentes de tamanho n da população e construíssemos um intervalo com 95% de confiança análogo para cada amostra, 95 desses intervalos conteriam efetivamente o parâmetro populacional θ.

Estimação intervalar (cont.)

Observação

$$P(T_1 \leq \theta \leq T_2) = 1 - \alpha$$

significa o seguinte:
sendo

- $m =$ número de observações repetidas de $(X_1, \ldots, X_n)$
- $k(m) =$ número de intervalos $[t_1, t_2]$ que contêm θ

então

$$\lim_{m \to \infty} \frac{k(m)}{m} = 1 - \alpha.$$

Note que $1 - \alpha \neq P(t_1 \leq \theta \leq t_2) = \begin{cases} 1, & \text{se } \theta \in [t_1, t_2] \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Ciências ULisboa

Estimação intervalar (cont.)

Nível de confiança

- Quanto menor for a amplitude de um intervalo de confiança, maior será sua precisão.
- Idealmente, deseja-se um intervalo de confiança com amplitude reduzida e um alto nível de confiança.
- Entretanto, para um tamanho de amostra fixo, um aumento no nível de confiança resulta em uma maior amplitude do intervalo.
- Os níveis de confiança mais comuns que oferecem um bom equilíbrio entre precisão (refletida pela amplitude do intervalo) e confiabilidade (expressa pelo nível de confiança) são: 90%, 95% e 99%.

Ciências ULisboa

Método da Variável Fulcral

Variável fulcral

Uma **variável fulcral** é uma função da amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ e do parâmetro θ com distribuição de probabilidade independente de θ.

Método da Variável Fulcral (cont.)

Etapas para construir um intervalo de confiança

1. Definir o parâmetro que será estimado.
2. Determinar o tipo de população que está sendo analisada.
3. Escolher o nível de confiança desejado.
4. Estabelecer o tamanho da amostra.
5. Escolher a variável fulcral, que é a estatística amostral que permite estimar o parâmetro, e a respetiva distribuição amostral.
6. Construir o intervalo aleatório de confiança a partir da variável fulcral.
7. A partir dos dados da amostra observada, calcular os limites do intervalo de confiança, obtendo o intervalo final.
8. Interpretar os resultados e apresentar uma conclusão.

Intervalo de Confiança para o Valor Esperado, Variância Conhecida

Na obtenção de um intervalo de confiança para o valor esperado de uma população com variância conhecida, distinguiremos dois casos:

1. população normal;
2. população com distribuição arbitrária e dimensão da amostra suficientemente grande ($n \geq 30$).

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de Confiança para μ de uma população normal com σ^2 conhecida

Situação

- População: $X \sim N(\mu, \sigma)$
- $E(X) = \mu$ (desconhecido - parâmetro a estimar)
- $V(X) = \sigma^2$ (conhecida)
- $(X_1, \ldots, X_n)$ (amostra aleatória de dimensão n de X)
- $\bar{X}$ (estimador pontual de μ)

Obtenção da variável fulcral

Seja $X_1, \ldots, X_n$ uma amostra aleatória de uma população $N(\mu, \sigma)$ em que o valor de σ^2 é conhecido.
Já vimos que

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longleftrightarrow Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

Note que Z é uma função da a.a. e do parâmetro desconhecido μ com distribuição conhecida e que não depende de μ. Logo, é nossa variável fulcral.

Ciências ULisboa

Método da Variável Fulcral (cont.)

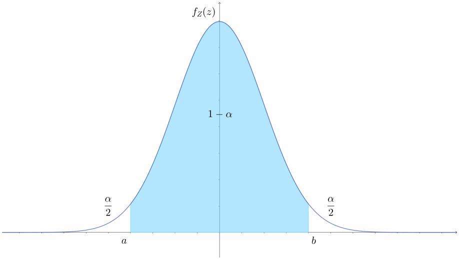
Obtenção dos quantis de probabilidade

Fixado $0 < \alpha < 1$, determinemos a e b tais que

$$P\,(a \leq Z \leq b) = 1 - \alpha$$

Como, em geral, existe uma infinidade de pares de valores (a, b) nessas condições, a opção mais comum consiste em escolher (a, b) tais que

$$P(Z < a) = P(Z > b) = \frac{\alpha}{2}$$



Assim, precisamos determinar a e b tais que

$$\begin{cases} P(a \leq Z \leq b) & = 1 - \alpha \\ P(Z < a) = P(Z > b) & = \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

Da segunda igualdade segue que $a = \Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e $b = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$. Pela simetria da normal, tem-se $a = -b$.

Resolvendo a desigualdade

Resolvendo a desigualdade anterior em ordem a μ:

$$\begin{aligned} P\left(a \leq Z \leq b\right) = 1 - \alpha &\iff P\left(-b \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq b\right) = 1 - \alpha \\ &\iff P\left(-b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \overline{X} - \mu \leq b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \\ &\iff P\left(\overline{X} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \\ &\Longleftarrow P\left(\mu \in \left[\overline{X} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) = 1 - \alpha \end{aligned}$$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Obtém-se assim:

$$\text{IAC}_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) = \left[\overline{X} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

um intervalo aleatório de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para μ.

Substituindo $\overline{X}$ por $\overline{x}$ (valor observado da média de uma amostra aleatória) passamos a ter um intervalo concreto, ou seja:

$$\text{IC}_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) = \left[\overline{x} - b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + b\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

o intervalo de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para μ.

Exemplo: Um grupo de estudantes de Engenharia Física está a investigar a densidade de um novo material utilizado em dispositivos de alta precisão. Para tal, realizaram 10 medições independentes da densidade (em g/cm³) do material, sob condições experimentais controladas. Assume-se que a densidade do material segue uma distribuição normal, com desvio padrão conhecido de 0.5 g/cm³. As medições obtidas foram: 3.2, 3.5, 3.7, 3.9, 3.4, 3.6, 3.8, 3.3, 3.5, 3.7.

(a) Determine um intervalo de confiança de 95% para a média da densidade do material.

(b) Determinar qual a menor dimensão da amostra, n, que permite garantir com 95% de confiança que $|\overline{x} - \mu| \leq 0.25$.

Método da Variável Fulcral (cont.)

Resolução (a):

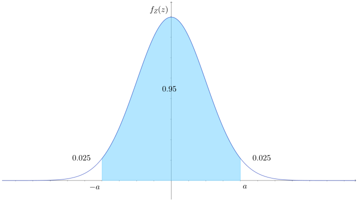
- $X-$ "densidade do novo material"
- $X \sim N(\mu, 0.5)$
- $\mu-$ desconhecida
- $\sigma = 0.5-$ conhecido
- $n = 10$, $\bar{x} = 3.56$
- Nível de confiança: $1 - \alpha = 0.95$
- Variável fulcral: $\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$
- $a = \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2}) = \Phi^{-1}(1 - \frac{0.05}{2}) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$ (tabela ou calculadora)
- $P\left(-a \leq \frac{\overline{X}-\mu}{0.5/\sqrt{10}} \leq a\right) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(\overline{X} - 1.96\frac{0.5}{\sqrt{10}} \leq \mu \leq \overline{X} + 1.96\frac{0.5}{\sqrt{10}}\right) = 0.95$
- $IAC_{95\%}(\mu) = \left[\overline{X} - 1.96\frac{0.5}{\sqrt{10}}, \overline{X} + 1.96\frac{0.5}{\sqrt{10}}\right]$

Ciências ULisboa

Método da Variável Fulcral (cont.)

- Como $\overline{x} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 3.56$, temos

$$
\begin{aligned}
IC_{95\%}(\mu) &= \left[\overline{x} - 1.96\frac{0.5}{\sqrt{10}}, \overline{x} + 1.96\frac{0.5}{\sqrt{10}}\right] \\
&= \left[3.56 - 1.96\frac{0.5}{\sqrt{10}}, 3.56 + 1.96\frac{0.5}{\sqrt{10}}\right] \\
&= [3.25, 3.87]
\end{aligned}
$$



Estima-se, com um nível de confiança de 95%, que a densidade média do novo material se situe entre 3.25 g/cm³ e 3.87 g/cm³.

Resolução (b):

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) = \left[\bar{x} - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \Leftrightarrow |\bar{x} - \mu| \leq a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Podemos determinar n tal que (a margem de erro é no máximo de 0.25)

$$a\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.25 \iff n = \left(\frac{a\sigma}{0.25}\right)^2$$

Como $a = 1.96$ e $\sigma = 0.5$, obtém-se $n = 15.36 \approx 16$.
Portanto $n = 16$.

Exemplo: Considere uma amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ de uma população $N(\mu, 9)$. Se o intervalo aleatório de confiança para μ é $[\overline{X} - 18/\sqrt{n}, \overline{X} + 18/\sqrt{n}]$, qual é o nível de confiança do intervalo?

Método da Variável Fulcral (cont.)

Resolução: Sabemos que o IAC é da forma

$$IAC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) = \left[\overline{X} - \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\frac{9}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \Phi^{-1}(1-\alpha/2)\frac{9}{\sqrt{n}}\right]$$

Assim,

$$\Phi^{-1}(1-\alpha/2)\frac{9}{\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \Phi^{-1}(1-\alpha/2) = \frac{18}{9} = 2 \Leftrightarrow 1-\alpha/2 = \Phi(2).$$

Pela tabela ou calculadora tem-se $\Phi(2) = 0.9772$. Logo

$$\alpha/2 = 1 - 0.9772 \Leftrightarrow \alpha = 0.0456.$$

Portanto,

$$1 - \alpha = 0.9544.$$

Observação

- Será que podemos afirmar que

$$P(3.25 \leq \mu \leq 3.87)? \quad \text{NÃO!}$$

- O intervalo de confiança (numérico) obtido pode não conter o valor verdadeiro de μ.
- Para um número muito grande de $IC_{(1-\alpha)\times 100\%}$, se espera que aproximadamente uma proporção $1-\alpha$ contenha o verdadeiro valor de μ.
- Quanto menor for o comprimento do IC maior será a precisão da média.
- Se aumentarmos o nível de confiança $(1-\alpha)$ com n e σ fixos, aumenta b e consequentemente o comprimento do IC.
- Quando n aumenta, mantendo fixos $1-\alpha$ e σ, o comprimento do IC diminui.

Ciências ULisboa

Intervalo de Confiança para μ de uma população arbitrária com σ^2 conhecida e dimensão da amostra suficientemente grande $n \geq 30$

Situação

- População: X arbitrária com $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2$
- μ (desconhecido - parâmetro a estimar)
- σ^2 (conhecida)
- $(X_1, \ldots, X_n)$ (amostra aleatória de dimensão $n \geq 30$ de X)
- $\bar{X}$ (estimador pontual de μ)

Obtenção da variável fulcral

Teremos do TLC a seguinte variável fulcral

$$\overline{X} \overset{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \iff Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$$

Intervalo aleatório de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para μ

$$\mathrm{IAC}_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) \simeq \left[\overline{X} - \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Intervalo de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para μ

$$\mathrm{IC}_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) \simeq \left[\overline{x} - \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Quando a população é normal mas σ^2 desconhecida teremos uma outra variável fulcral. Não se pode usar a variável fulcral $\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ pois σ é desconhecido. Vamos substituir σ por S (desvio padrão amostral) e usar a variável fulcral

$$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \quad ?$$

Durante muito tempo se julgou que $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ possuísse distribuição $N(0,1)$. No entanto, para amostras pequenas, S^2 está sujeito a grandes variações, pelo que há grandes discrepâncias entre a distribuição de $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ e $N(0,1)$.

Método da Variável Fulcral (cont.)

Teorema

Dada uma a.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ de uma população $X \sim N(\mu, \sigma)$, a variável aleatória

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$$

tem distribuição t-Student com $n-1$ graus de liberdade.

Definição

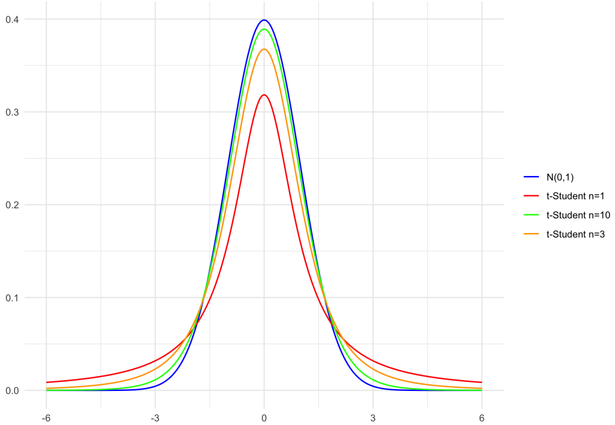
Uma variável aleatória com a função densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

diz-se que tem uma **distribuição t-Student** com n graus de liberdade, $X \sim t_{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$.

- $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$ e $\Gamma(n) = (n-1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- $E(T) = 0, \quad n \geq 2, \; V(T) = \frac{n}{n-2}, \quad n \geq 3$

Método da Variável Fulcral (cont.)



Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de Confiança para μ de uma população normal com σ^2 desconhecida

- População: $X \sim N(\mu, \sigma)$
- $\mu-$ desconhecido (parâmetro a estimar)
- σ^2- desconhecida
- Variável fulcral: $T = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$
- $P(a \leq T \leq b) = 1-\alpha \Leftrightarrow P\left(-b \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq b\right) = 1-\alpha$
- $P\left(\overline{X} - b\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + b\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$
- $\text{IAC}_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) = \left[\overline{X} - b\frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + b\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$, onde $b = F^{-1}_{t_{(n-1)}}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$
- $\text{IC}_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) = \left[\bar{x} - b\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + b\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Exemplo: Uma equipa de estudantes de Engenharia Biomédica está a investigar a densidade de uma nova biomatriz utilizada para regeneração de tecidos. Para tal, realizaram 10 medições independentes da densidade (em g/cm^3) da biomatriz, sob as mesmas condições experimentais. Assume-se que a densidade segue uma distribuição normal de média μ e desvio padrão σ. As medições obtidas foram: 3.2, 3.5, 3.7, 3.9, 3.4, 3.6, 3.8, 3.3, 3.5, 3.7. Determine um intervalo de confiança a 95% para μ.

Método da Variável Fulcral (cont.)

Resolução:

- $X-$ densidade da nova biomatriz
- $X \sim N(\mu, \sigma)$
- $n = 10$
- $\overline{x} = 3.56$
- $s = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\overline{x}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) - 10\overline{x}^2}{9}} = 0.222$
- Variável fulcral: $T = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{(n-1)}$
- $b = F^{-1}_{t_{(9)}}(0.975) = 2.262$ (tabela ou calculadora)
- $IC_{95\%}(\mu) = \left[3.56 - 2.262\frac{0.222}{\sqrt{10}}, 3.56 + 2.262\frac{0.222}{\sqrt{10}}\right] = [3.40, 3.72]$

Ciências ULisboa

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de Confiança para μ de uma população arbitrária com σ^2 desconhecida

- População: X arbitrária com $n \geq 30$
- $\mu-$ desconhecido (parâmetro a estimar)
- σ^2- desconhecida
- Variável fulcral: $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
- $P(a \leq Z \leq b) = 1-\alpha \Leftrightarrow P\left(-b \leq \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq b\right) = 1-\alpha$
- $P\left(\overline{X} - b\frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + b\frac{S}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$
- $\mathrm{IAC}_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) \simeq \left[\overline{X} - b\frac{S}{\sqrt{n}}; \overline{X} + b\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$, onde

  $b = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$
- $\mathrm{IC}_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu) \simeq \left[\bar{x} - b\frac{s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + b\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

- Considere-se uma população $X \sim N(\mu, \sigma)$ com μ e σ^2 desconhecidos e $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de X.
- Queremos determinar $IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\sigma^2)$.
- Estimador pontual de σ^2 é S^2.
- A variável fulcral obtém-se do teorema abaixo.

Teorema

Dada uma amostra aleatória $(X_1, \ldots, X_n)$ de uma população $X \sim N(\mu, \sigma)$, a variável aleatória

$$Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{(n-1)}$$

tem **distribuição do qui-quadrado com $n-1$ graus de liberdade**.

Método da Variável Fulcral (cont.)

Definição

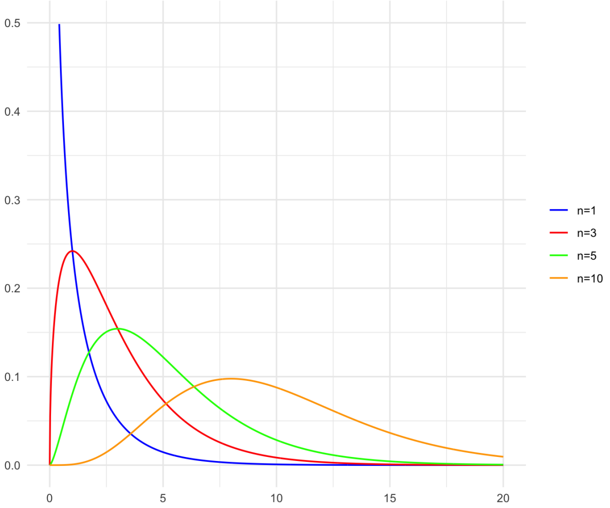
Uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0,$$

diz-se que tem uma **distribuição do qui-quadrado** com n graus de liberdade, $X \sim \chi^2_{(n)}, n \in \mathbb{N}$.

- $E(X) = n,\ V(X) = 2n$

Método da Variável Fulcral (cont.)



Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo de Confiança para a variância de uma população normal com μ desconhecido

- População: $X \sim N(\mu, \sigma)$
- $\mu-$ desconhecido
- σ^2- desconhecida (parâmetro a estimar)
- Variável fulcral: $Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{(n-1)}$
- $P(a \leq Q \leq b) = 1-\alpha \Leftrightarrow P\left(a \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \leq b\right) = 1-\alpha$
- $P\left(\frac{(n-1)S^2}{b} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{a}\right) = 1-\alpha$
- $IAC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2}{b}, \frac{(n-1)S^2}{a}\right]$ onde $a = F^{-1}_{\mathcal{X}^2_{(n-1)}}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e $b = F^{-1}_{\mathcal{X}^2_{(n-1)}}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$
- $IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)s^2}{F^{-1}_{\mathcal{X}^2_{(n-1)}}(1-\frac{\alpha}{2})}, \frac{(n-1)s^2}{F^{-1}_{\mathcal{X}^2_{(n-1)}}(\frac{\alpha}{2})}\right]$
- $IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{F^{-1}_{\mathcal{X}^2_{(n-1)}}(1-\frac{\alpha}{2})}}, \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{F^{-1}_{\mathcal{X}^2_{(n-1)}}(\frac{\alpha}{2})}}\right]$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Exemplo: Uma equipa de estudantes de Engenharia Física está a investigar a densidade de um novo material utilizado em aplicações de alta precisão. Para tal, realizaram 10 medições independentes da densidade (em g/cm^3) do material, sob as mesmas condições experimentais. Assume-se que a densidade segue uma distribuição normal de média μ e desvio padrão σ. As medições obtidas foram: 3.2, 3.5, 3.7, 3.9, 3.4, 3.6, 3.8, 3.3, 3.5, 3.7. Determine um intervalo de confiança a 99% para σ.

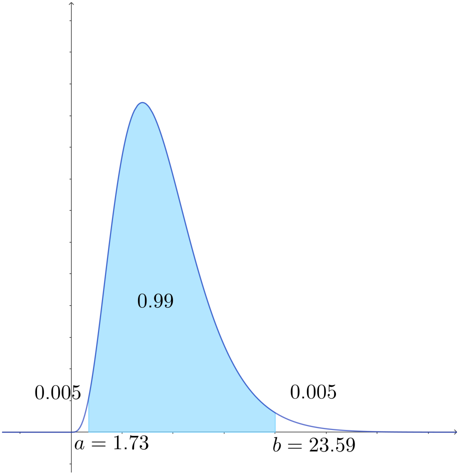
Método da Variável Fulcral (cont.)

Resolução:

- $X-$ densidade do novo material
- $X \sim N(\mu, \sigma)$
- $\mu-$ desconhecida
- σ^2- desconhecida (parâmetro a estimar)
- $n = 10$
- $s = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - n\overline{x}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{10} x_i^2\right) - 10\overline{x}^2}{9}} = 0.222$
- Variável fulcral: $Q = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathcal{X}^2_{(n-1)}$
- $a = F^{-1}_{\mathrm{X}^2_{(9)}}(0.005) = 1.735$

  $b = F^{-1}_{\mathrm{X}^2_{(9)}}(0.995) = 23.59$
- $IC_{99\%}(\sigma^2) = \left[\frac{9 \times 0.222}{23.59}, \frac{9 \times 0.222}{1.735}\right] = [0.084, 1.151]$ e $IC_{99\%}(\sigma) = [0.289, 1.072]$

Método da Variável Fulcral (cont.)



Intervalo de Confiança aproximado para uma probabilidade (ou proporção)

- População: $X \sim Bernoulli(p)$
- $(X_1, \ldots, X_n)$ a.a., $n \geq 30$
- Variável fulcral: $Z = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
- $P(a \leq Z \leq b) \simeq 1-\alpha \Leftrightarrow P\left(-b \leq \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}} \leq b\right) \simeq 1-\alpha$
- $P\left(\overline{X} - b\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}} \leq p \leq \overline{X} + b\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\right) \simeq 1-\alpha$
- $IAC_{(1-\alpha)\times 100\%}(p) \simeq \left[\overline{X} - b\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}, \overline{X} + b\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\right]$, onde $b = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$
- $IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(p) = \left[\overline{x} - b\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}, \overline{x} + b\sqrt{\frac{\overline{x}(1-\overline{x})}{n}}\right]$

Método da Variável Fulcral (cont.)

Exemplo: Um inquérito recente feito a 1000 habitantes de uma região rural revelou que 448 apoiam a aplicação de penas de prisão pesadas em crimes de fogo posto. Construa um IC aproximado a 95% para a probabilidade (p) de uma pessoa escolhida ao acaso na referida região ser favorável à aplicação da referida pena.

Resolução:

- Variável de interesse:
$$X = \begin{cases} 1, & \text{se a pessoa for favorável à aplic. da referida pena} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
- $X \sim Bernoulli(p)$
- $p-$ desconhecido
- $n = 1000 \geq 30$
- $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{448}{1000} = 0.448$
- Variável fulcral: $Z = \frac{\overline{X}-p}{\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
- $b = \Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$
- $$IC_{95\%} \simeq \left[0.448 - 1.96\sqrt{\frac{0.448(1-0.448)}{1000}}, 0.448 + 1.96\sqrt{\frac{0.448(1-0.448)}{1000}}\right]$$
$$\simeq [0.417178, 0.478822]$$

Ciências ULisboa

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalos de Confiança para a Diferença entre dois Valores Esperados, Variâncias Conhecidas

Tal como anteriormente, distinguiremos dois casos:

1. duas populações independentes, com distribuições normais,
2. duas populações independentes, com distribuições arbitrárias e dimensões das duas amostras suficientemente grandes,

sendo que as variâncias são conhecidas em qualquer dos casos.

Intervalo de confiança para a diferença entre valores esperados de duas populações normais independentes com variâncias conhecidas

Situação

- $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1)$ e $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$ independentes
- $(\mu_1 - \mu_2)$ desconhecido
- σ_1^2 e σ_2^2 conhecido
- $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1})$ e $(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2})$ amostra aleatória de dimensão n_1 e n_2
- $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ estimador pontual de $(\mu_1 - \mu_2)$
- Variável Fulcral

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

Intervalo aleatório de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para $\mu_1-\mu_2$

$$IAC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu_1-\mu_2)=\left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,,\,(\bar{X}_1-\bar{X}_2)+\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

Intervalo de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para $\mu_1-\mu_2$

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu_1-\mu_2)=\left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\,,\,(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

Intervalo de confiança aproximado para a diferença entre valores esperados de duas populações arbitrárias (não normais) independentes com variâncias conhecidas para amostras grandes

Situação

- X_1 e X_2 independentes, com distribuições arbitrárias
- $(\mu_1 - \mu_2)$ desconhecido
- σ_1^2 e σ_2^2 conhecido
- $(X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{1n_1})$ e $(X_{21}, X_{22}, \ldots, X_{2n_2})$ amostra aleatória de dimensão $n_1 \geq 30$ e $n_2 \geq 30$
- $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ estimador pontual de $(\mu_1 - \mu_2)$
- Variável Fulcral

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$$

Ciências ULisboa

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalo aleatório de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para $\mu_1-\mu_2$

$$IAC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu_1-\mu_2) \simeq \left[(\bar{X}_1-\bar{X}_2)-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ ,\ (\bar{X}_1-\bar{X}_2)+\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

Intervalo de confiança a $(1-\alpha)\times 100\%$ para $\mu_1-\mu_2$

$$IC_{(1-\alpha)\times 100\%}(\mu_1-\mu_2) \simeq \left[(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\ ,\ (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

Ciências ULisboa

Método da Variável Fulcral (cont.)

Exemplo: Investigadores de Engenharia Biomédica estão a comparar dois sensores de pressão arterial (Sensor A e Sensor B), usados para monitorização contínua em ambientes hospitalares. Cada sensor foi testado num grupo independente de pacientes, e os resultados (em mmHg) para a pressão arterial sistólica foram os seguintes:

- Sensor A:
  - Média amostral: $\bar{x}_A = 118.4$ mmHg
  - Desvio padrão populacional: $\sigma_A = 5$ mmHg
  - Tamanho da amostra: $n_A = 40$
- Sensor B:
  - Média amostral: $\bar{x}_B = 120.1$ mmHg
  - Desvio padrão populacional: $\sigma_B = 6$ mmHg
  - Tamanho da amostra: $n_B = 35$

a) Construa um intervalo de confiança de 95% para a diferença entre as médias da pressão sistólica dos dois sensores $(\mu_A - \mu_B)$.
b) Comente o resultado: existe evidência de que um dos sensores mede, em média, valores sistematicamente mais elevados?

Método da Variável Fulcral (cont.)

Exemplo: Uma equipa de cientistas de dados de uma empresa de *eSports* está a estudar o tempo médio de reação de jogadores profissionais em dois jogos distintos: *GameX* (um jogo de tiros em primeira pessoa) e *GameY* (um jogo de estratégia em tempo real). O objetivo é determinar se existe uma diferença significativa entre os tempos médios de reação dos jogadores nestes dois jogos. Assume-se que os tempos de reação seguem distribuições normais e que as amostras são independentes. Os desvios padrão populacionais são desconhecidos, mas foram estimados a partir das amostras recolhidas:

- **GameX**:
  - Média amostral: $\bar{x}_X = 245$ ms
  - Desvio padrão amostral: $s_X = 15$ ms
  - Tamanho da amostra: $n_X = 40$
- **GameY**:
  - Média amostral: $\bar{x}_Y = 258$ ms
  - Desvio padrão amostral: $s_Y = 18$ ms
  - Tamanho da amostra: $n_Y = 35$

Construa um intervalo de confiança de 95% para a diferença entre os tempos médios de reação nos dois jogos, $\mu_X - \mu_Y$, assumindo que as variâncias são desconhecidas e diferentes. Com base no intervalo construído, conclua se existe evidência de que os dois jogos exigem tempos médios de reação significativamente diferentes.

Método da Variável Fulcral (cont.)

Intervalos de confiança para um parâmetro e dois parâmetros (amostras independentes)

Parâmetros a estimar	σ^2 conhecido?	Tipo de população	Dimensão da amostra	Variável fulcral e correspondente distribuição amostral
μ	Sim	Normal	Qualquer	$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0;1)$
		Outra	$n > 30$	$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \stackrel{.}{\sim} N(0;1)$
	Não	Qualquer	$n > 30$	$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \stackrel{.}{\sim} N(0;1)$
		Normal	Qualquer	$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$
p	- - -	Bernoulli	$n > 30$	$\frac{\hat{P}-p}{\sqrt{\frac{\hat{P}(1-\hat{P})}{n}}} \stackrel{.}{\sim} N(0;1)$
σ^2	- - -	Normal	Qualquer	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
$\mu_1-\mu_2$	σ_1^2 e σ_2^2 conhecidas	Normais	Quaisquer	$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0;1)$
		Outras	$n_1 > 30$ e $n_2 > 30$	$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \stackrel{.}{\sim} N(0;1)$
	σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas	Quaisquer	$n_1 > 30$ e $n_2 > 30$	$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \stackrel{.}{\sim} N(0;1)$
	σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas ($\sigma_1^2=\sigma_2^2$)	Normais	Quaisquer	$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}$
	σ_1^2 e σ_2^2 desconhecidas ($\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$)	Normais	Quaisquer	$\frac{(\overline{X}_1-\overline{X}_2)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}} \sim t_r$ sendo r o número natural mais próximo de $r^* = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2+\frac{1}{n_2-1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$
p_1-p_2	- - -	Bernoulli	$n_1 > 30$ e $n_2 > 30$	$\frac{(\hat{P}_1-\hat{P}_2)-(p_1-p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{P}_1(1-\hat{P}_1)}{n_1}+\frac{\hat{P}_2(1-\hat{P}_2)}{n_2}}} \stackrel{.}{\sim} N(0;1)$
$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$	- - -	Normais	Quaisquer	$\frac{S_1^2}{S_2^2} \times \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1-1;n_2-1)$

Ciências ULisboa

Referências

- Manuel Cabral Morais (2020): Probabilidade e Estatística: Teoria, Exemplos & Exercícios. IST Press, 1a edição.

Ciências ULisboa